



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### **Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

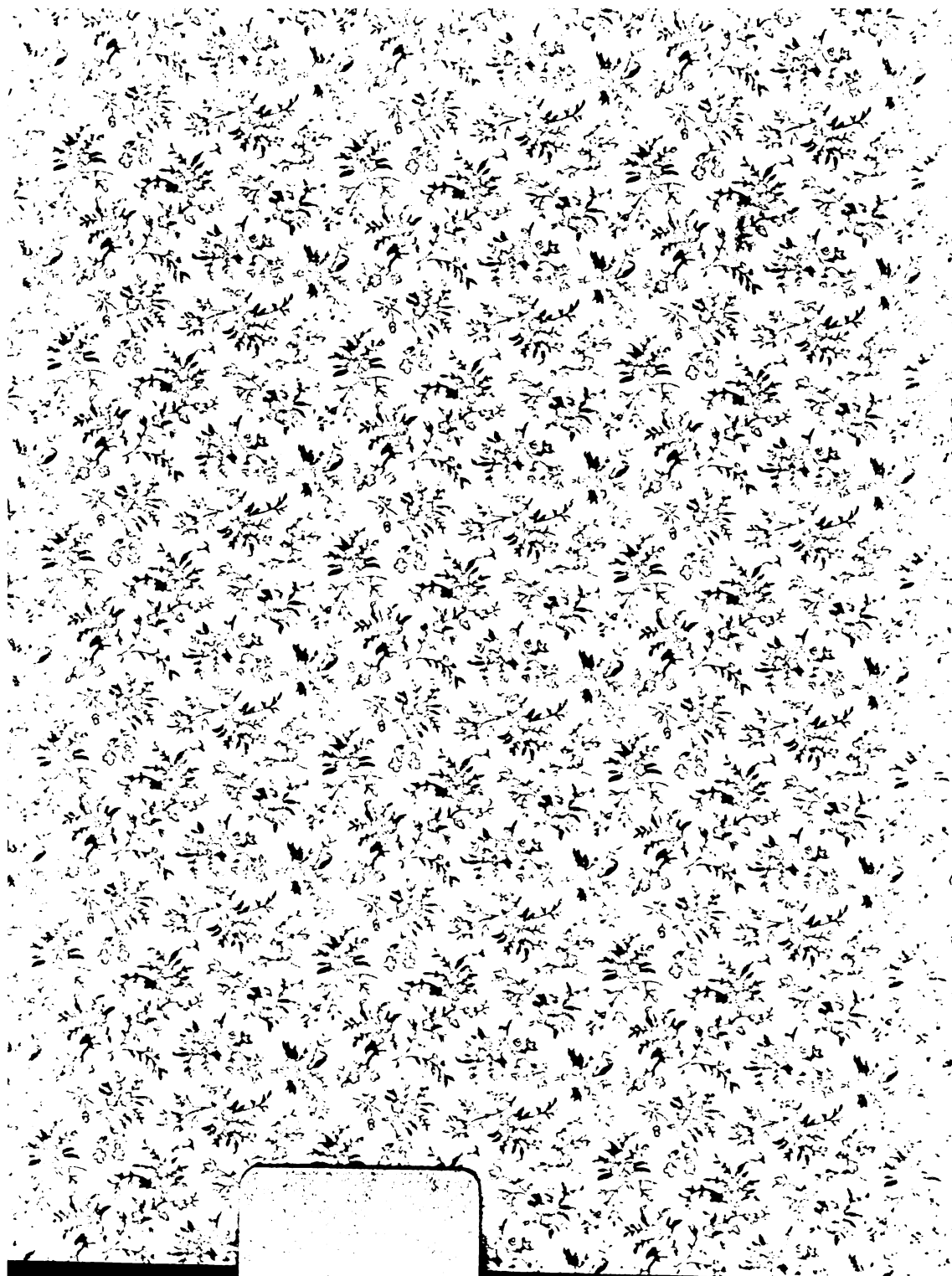
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

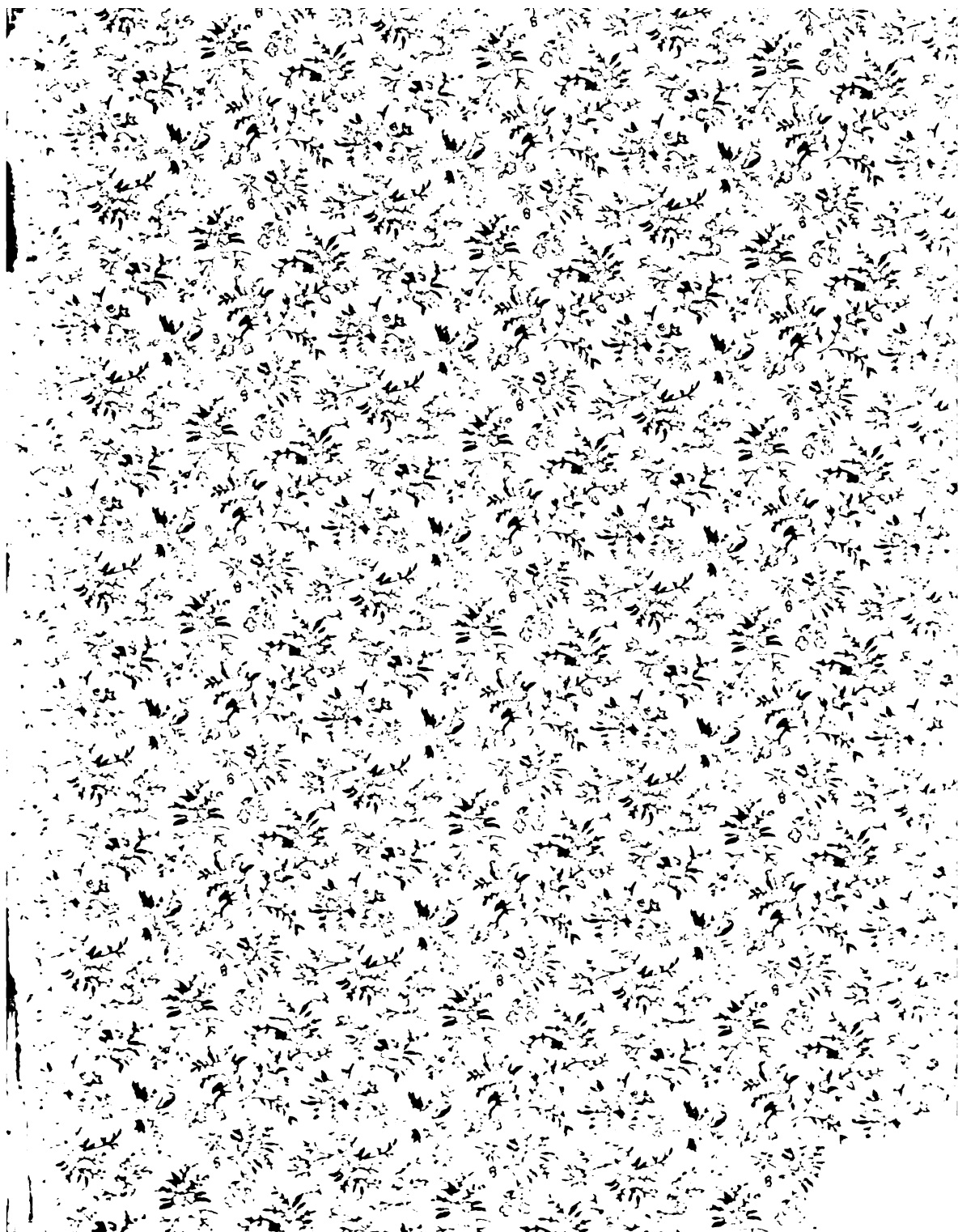
- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

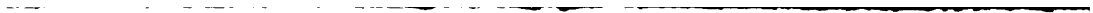
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.











1



Ausgewählte Kapitel  
der  
Zahlentheorie I.

---

Vorlesung,  
gehalten im Wintersemester 1895/96

von

**F. Klein.**

---

Ausgearbeitet von A. Sommerfeld.

—\*—  
GÖTTINGEN 1896.  
S

---



**LIBRARY OF THE  
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY,**

*A. 29459*

# Inhaltsverzeichniss.

	Seite
Einleitung.	
Die Punktgitter in der Ebene . . . . .	1
Arithmetische Darlegung des Euklidischen Algorithmus bezw. der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung . . . . .	9
Zugehörige geometrische Interpretation . . . . .	17
Entwicklung rationaler Brüche, Erzeugung aller unimodularen Substitutionen durch S und T, bezw. S und S' . . . . .	25
Der Satz von Lagrange über die relativen Minima der Linearformen . . . . .	39
I. Haupttheil: Die Reductionstheorie der einzelnen binären quadratischen Form.	
I. Geometrische Vorbegriffe.	
Das System der Geometrie . . . . .	50
Die Pseudometrik, der elliptische Fall . . . . .	57
Der hyperbolische und der parabolische Fall . . . . .	71
Bedeutung des Problems der zahlentheoretischen Aequivalenz zweier binärer quadratischer Formen . . . . .	82
II. Die Reductionstheorie im parabolischen Falle . . . . .	93
III. Die Reductionstheorie im hyperbolischen Falle.	
Die Einführung der natürlichen Umrisspolygone, Definition der reduzierten Formen . . . . .	103
Serien zusammengehöriger reduzierter Formen . . . . .	113
Arithmetische Bestimmungen hierfür . . . . .	120
Die gauzzahligen Formen insbesondere ihre regulären Automorphieen . . . . .	128
Beziehungen zur Pell'schen Gleichung, der Pell'sche Winkel . . . . .	141
Gauzzahlige Formen derselben Discriminante, Endlichkeit der Klassenzahl . . . . .	149
Zahlenbeispiel $D = 40$ . . . . .	152
IV. Die Reductionstheorie im elliptischen Falle . . . . .	165

## II. Haupttheil. Die Reductionstheorie in ihrer Wirkung auf die Gesammtheit der binären quadratischen Formen.

### I. Allgemeiner Ansatz.

Die Coefficientenverhältnisse $a : b : c$ als trimetrische Coordinaten in der Ebene	173
Der fundamentale Kegelschnitt und seine Parameterdarstellung	179

### II. Die definiten quadratischen Formen und die Punkte im Inneren des Kegelschnitts.

Abgrenzung des reducirten Raumes	183
Rationale Punkte auf dem Kegelschnitt und das Hilfsmittel der harmonischen Construction	186
Fortschreitende Construction neuer Dreiecke von dem Dreiecke $0 \infty 1$ aus	192
Algorithmus für die Parameterwerthe der successiven Dreiecksecken	196
Beziehungen zur Kettenbruchentwicklung der rationalen Brüche. Definition der Elementarsehnen erster und zweiter Art	201
Der Fundamentalbereich (Discontinuitätsbereich) der Gruppe $(\alpha\delta - \beta\gamma) = +1$	207
Verschärfungen für den Rand des Fundamentalbereichs; Formen mit aussergewöhnlichen Automorphieen	214
Der Fundamentalbereich der erweiterten Gruppe $(\alpha\delta - \beta\gamma) = \frac{+}{-} 1$ ; die formae ancipites	222
Vergleich der neuen Theorie mit den früheren Parallelgittern	232

### III. Die Formen mit $D = 0$ und die Punkte auf dem Kegelschnitt.

Aequivalente Punkte auf dem Kegelschnitt liegen überall dicht	238
---	-----

### IV. Die indefiniten Formen mit $D > 0$ und die Punkte ausserhalb des Kegelschnitts.

Der reduzierte Punktraum	244
Das Hermite'sche Princip: Der Punkt wird durch seine Polarsehne ersetzt	248
Die Polarsehnen der reducirten Formen	251
Kette von Elementarsehnen erster Art, zu einer Polarsehne gehörig	257
Zusammenhang mit der früheren Reductionstheorie der Formen $f$	261

	Seite
Die Automorphieen unserer Formen . . . . .	267
Die Bedeutung der gewöhnlichen Automorphieen bei Zugrundelegung der Cayley'schen Massbestimmung . . . . .	271
Entsprechende Characterisirung der anderen Automorphieen . . . . .	283
Die spezifische Schwierigkeit der Theorie . . . . .	290

**Anhang: Vorläufiges über elliptische Functionen und deren  
Zusammenhang mit der Theorie der definiten quadra-  
tischen Formen.**

Die Parallelgitter als gemeinsame Grundlage der beiden Theorien . . . . .	295
Eine erste Definition der elliptischen Functionen (Vorstellung der $p(u)$ , $p'(u)$ , $g_2$ , $g_3$ ) . . . . .	302
Verhalten der so definirten Functionen in dem Periodenparallelogramm der $\omega$ -Ebene . . . . .	309
Eintheilung der $\omega$ -Ebene in Kreisbogendreiecke . . . . .	313
Das Verhalten der Modulfunctionen im einzelnen Fundamentalbereich der $\omega$ -Ebene . . . . .	331
Die reelle $\omega$ -Axe als Ort gehäufter Singularitäten . . . . .	337
Aufsteigen zu den Modulformen . . . . .	340
Die elliptischen Modulfunctionen als analytische Invarianten unserer zahlen- theoretischen Gebilde . . . . .	352
Weiterführung der elliptischen Theorie: Das allgemeine Programm der „Modulfunctionen“ . . . . .	356
Nähere Angaben über die niedersten Stufenzahlen . . . . .	365
Noch weitergehende Verallgemeinerungen . . . . .	384—391





Abzicht dieser Vorlesung ist es, die Theorie der binären quadratischen Formen in geometrischem Gewande zu entwickeln. Dabei wünschen wir nicht, für unsere geometrische Auffassung der Theorie den prinzipiellen Vorrang gegenüber einer rein arithmetischen Behandlung in Anspruch zu nehmen. Unsere Meinung ist es vielmehr, dass anschauliches Erfassen und logische Behandlungsweise der Mathematik sich nicht ausschließen, sondern gegenseitig unterstützen sollen. In diesem Sinne werden wir in dem parallel laufenden Seminar dieselbe Theorie unter wesentlicher Mitwirkung von Hilbert mehr von ihrer

2.

arithmetischen Seite her studieren.

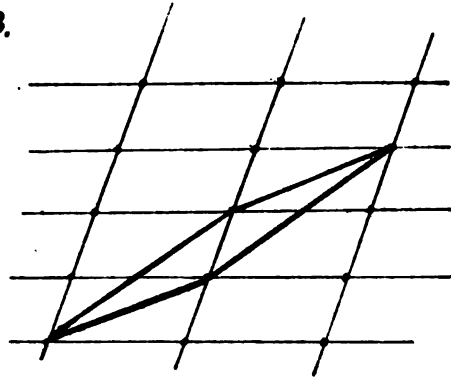
Indem wir uns sogleich in medias res versetzen, schreiben wir den allgemeinen Ausdruck einer binären quadratischen Form folgendermassen an:  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ .

Für die Zwecke der Zahlentheorie sind die Veränderlichen  $x$  und  $y$  (ebenso wie die Coefficienten  $a, b, c$ ) ganze Zahlen. Wir werden also bei geometrischer Auffassung dazu geführt, in der  $x, y$ -Ebene die ganzzahligen Punkte zu markieren. Wir legen irgend ein System von Parallelcoordinaten zu Grunde, dasselbe braucht nicht gerade rechtwinklig zu sein, auch kann der Maassstab, mit dem wir auf der  $x$ - und  $y$ -Axe messen verschieden sein. Durch die Punkte  $x = 1, 2, 3 \dots$  der  $x$ -Axe, bez. die Punkte  $y = 1, 2, 3 \dots$  der  $y$ -Axe ziehen wir Parallelen zu den Coordinatenachsen und erhalten die Figur eines Parallelogitters. Die Eckpunkte desselben, die „Gitterpunkte“, liefern uns die ganzzahligen Punkte der Ebene. Wenn wir unsere Aufmerksamkeit nur auf diese richten und von den verbindenden Geraden absehen, sprechen wir von einem Punktgitter.



3.

Eine erste Frage, die wir zu erledigen haben, ist diese: Auf wie viel Arten ist es möglich, ein Punktgitter als Parallelgitter aufzufassen?



Wir denken uns die beiden durch den Nullpunkt verlaufenden Geraden eines ev. neuen Parallelgitters als Axen eines neuen  $x', y'$ -Systems und wählen als Meas.-einheit auf den neuen Axen die Entfernung des auf der betr. Axe gelegenen nächststen Punktes vom Nullpunkte. Sollen beide Parallelgitter, das neue und das alte, zu demselben Punktgitter gehören, so müssen den sämtlichen ganzzahligen Punkten des  $x, y$ -Systemes ganzzahlige Punkte im  $x', y'$ -System entsprechen und umgekehrt. Wir können daher unsere ursprüngliche Aufgabe analytisch folgendermassen aussprechen:

Es sollen alle möglichen Transformationsformeln:

$$x = \alpha x' + \beta y'$$

$$y = \gamma x' + \delta y'$$

von der Rechenbarkeit aufgesucht werden,  
dass zu ganzzahligen Werten von  $x, y$  ganzzahlige Werte von  $x', y'$  gehören und umgekehrt.

Unter den Koordinatentransformationen der vorstehenden Form nimmt der Fall  $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$  eine Ausnahmestellung ein. Wir schliessen denselben hier aus. Im Übrigen unterscheiden wir die Transformation als gleichstimmig oder ungleichstimmig, je nachdem  $\alpha\beta - \gamma^2 > 0$  oder  $\alpha\beta - \gamma^2 < 0$  ist. Im ersteren Falle ist der Sinn der Drehung, durch welche die positive  $x$ -Achse in die positive  $y$ -Achse, bez. die positive  $x'$ -Achse in die positive  $y'$ -Achse auf dem kürzesten Wege übergeführt wird, derselbe, im zweiten Falle der entgegengesetzte.

Aus der Bedingung, dass den ganzzahligen Punkten  $x', y'$  ganzzahlige Punkte  $x, y$  entsprechen sollen, folgt zunächst, indem wir  $x' = 1, y' = 0$  bez.  $x' = 0, y' = 1$  nehmen, dass die Substitutionskoeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ganze Zahlen sein müssen. Sodann lösen wir nach  $x'$  und  $y'$  auf:

$$x' = \frac{\delta x - \beta y}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad y' = \frac{-\gamma x + \alpha y}{\alpha\delta - \beta\gamma};$$

5.

aus der Bedingung, dass auch den ganzzahligen Werten  $x, y$  ganzzahlige Werte  $x', y'$  entsprechen sollen, folgt in derselben Weise, dass auch die folgenden Grössen

$$\frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} \quad , \quad \frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \quad , \quad \dots$$

bez. ganzen Zahlen  $(a, b, c, d)$  gleich sein müssen.

Wir haben also die Gl:

$$\alpha = a(\alpha\delta - \beta\gamma),$$

$$\beta = b(\alpha\delta - \beta\gamma),$$

$$\gamma = c(\alpha\delta - \beta\gamma),$$

$$\delta = d(\alpha\delta - \beta\gamma),$$

aus denen sich durch geeignete Multiplikation ergibt:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

oder

$$1 = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Da die rechts stehenden Factoren ganze Zahlen sind, müssen sie beide entweder gleich  $+1$  oder gleich  $-1$  sein. Wir gewinnen also das Resultat: Die Determinante unserer Transformation  $\alpha\delta - \beta\gamma$  muss gleich  $\pm 1$  sein. Umgekehrt sieht man, dass dann wirklich unsere Transformation die verlangten Eigen-

schaften besitzt.

Fr. d. 25. I. Die Determinante  $(\alpha \beta - \beta \gamma)$  hat eine einfache geometrische Bedeutung. Construieren wir uns das „Fundamentalparallelogramm“ des transformierten Gitters, indem wir die Verbindungsstrecken des Nullpunktes mit den Punkten  $x' = 1, y' = 0$  und  $x' = 0, y' = 1$  zu einem Parallelogramm vervollständigen. Die letzteren haben im  $x, y$ -Systeme die Coordinaten  $x = \alpha, y = \gamma$  bez.  $x = \beta, y = \delta$ . Der Inhalt des transformierten Fundamentalparallelogramms ist also gerade gleich der Determinante  $\alpha \delta - \beta \gamma$  vorausgesetzt, dass wir den Inhalt des ursprünglichen Elementarparallelogramms = 1 setzen.

Heithin sagt die Gleichung  $\alpha \delta - \beta \gamma = \pm 1$  aus, dass der Flächeninhalt des neuen Elementarparallelogramms gleich 1, d. h. ebenso groß, wie der des alten ist.

In dieser geometrischen Fassung ist der Satz, dass bei unserer Fragestellung  $\alpha \delta - \beta \gamma = \pm 1$  wird, eigentlich selbstverständlich, wie die folgende Betrachtung zeigt, die wir hier nur im allgem. ei.

nen Umriß skizziren. Die Anzahl der Elementarparallelogramme ist ebenso groß, wie die Anzahl der Gitterpunkte; denn wir können je dem Gitterpunkte ein anstossendes Parallelogramm zuordnen und umgekehrt. Die Anzahl der Gitterpunkte, also auch die der Elementarparallelogramme ist hiernach in beiden Gittern dieselbe. Wir teilen nun durch die beiden Gitter dieselbe Größe (nämlich den Inhalt der ganzen Ebene) in dieselbe Anzahl unter sich gleicher Theile (einzeln Parallelogramme) ein. Hithin werden diese Theile bei beiden Einteilungen gleich groß ausfallen. - Dies überlegung kann und muß natürlich präcisirt werden, wie solches im Seminar geschehen wird.

Die Frage nach den möglichen Parallelogittern führte uns auf die Untersuchung der Gleichung  $\alpha \beta \gamma = \pm 1$ . Ohne Weiteres zeigt sich, daß  $\alpha$  und  $\gamma$ , ebenso  $\beta$  und  $\beta$  etc. relativ prim gewählt werden müssen. Ersteres heißt geometrisch, daß die erste Seite des

8.

neuen Fundamentalparallelogramms im Innern keine Gitterpunkte enthalten darf. Dies vorausgesetzt, wollen wir zeigen, dass man zu beliebig gegebenem  $\alpha$  und  $\gamma$  allemal Zahlen  $\beta$  und  $\beta'$  (u. s. w. unendlich viele Zahlen) finden kann, welche unserer Gleichung genügen, oder anders ausgedrückt, dass man zu einer beliebig im Gitter gezogenen ersten Strecke, welche in ihrem Innern keinen Gitterpunkt trägt, eine zweite so bestimmen kann, dass das entstehende Parallelogramm den Flächeninhalt  $\alpha$  hat.

Zunächst zeigt sich, dass, wenn ein solches Zahlenpaar  $(\beta', \beta)$  gefunden ist, so gleich unendlich viele (und damit alle überhaupt existirenden) angegeben werden können. Sei nämlich

$$\alpha \beta' - \beta \gamma = 1.$$

Wir subtrahieren davon die Gl.  $\alpha \beta - \beta \gamma = \alpha$  und finden als Bedingung für  $\beta$  und  $\beta'$  die Gl:

$$\alpha(\beta - \beta') = \gamma(\beta - \beta').$$

Da  $\alpha$  und  $\gamma$  als relativ prim vorausge-

9.

setzt werden, so muß, unter  $m$  eine ganze Zahl verstanden, jede Lösung unserer Gl. die Form haben:

$$\beta = \beta' + m\alpha, \quad \beta' = \beta' + m\gamma$$

oder

$$\beta = \beta' + m\alpha, \quad \beta' = \beta' + m\gamma.$$

Dieser Schluss beruht wesentlich auf den elementaren Teilbarkeitsgesetzen der ganzen Zahlen. Umgekehrt erkennt man, daß die vorstehenden Werte von  $\beta$  und  $\beta'$  beliebigem  $m$  unserer Gleichung genügen. Wir haben also die allgemeinste Lösung der vorliegenden „Diophantischen Gleichung ersten Grades“ aus einer speziellen Lösung abgeleitet.

Um eine einzelne Lösung  $\beta, \beta'$  zu finden, dazu dient uns der „Euklidische Algorithmus“. Derselbe hat zunächst den Zweck, den größten gemeinsamen Teiler zweier gegebener Zahlen  $a_1$  und  $a_2$  zu berechnen. Wir setzen an:

$$a_1 = u_1 a_2 + a_3$$

$$a_2 = u_2 a_3 + a_4$$

$$a_3 = u_3 a_4 + a_5$$

...

Hier sind  $a_3, a_4, \dots, u_1, u_2, \dots$  lauter positive ganze Zahlen, von denen wir die letzteren jedesmal so gross wie möglich wählen.

Wir machen nun den specificisch Zahlen, theoretischen Schluss, dass in der Reihe der abnehmenden Zahlen  $a_3, a_4, \dots$  schliesslich die Null auftreten muss, dass also das Euklidische Verfahren abbricht. Die letzten Gleichungen mögen lauten:

$$a_{n-2} = u_{n-2} a_{n-1} + a_n,$$

$$a_{n-1} = u_{n-1} a_n.$$

Indem wir diese Gleichungen einmal von vorwärts nach rückwärts und einmal von rückwärts nach vorwärts lösen, erkennen wir, dass  $a_n$  der grösste gemeinsame Theiler von  $a_1$  und  $a_2$  ist. In dem besondern Fall, wo  $a_1$  und  $a_2$  relativ prim sind, muss  $a_n$  gleich 1 sein.

Wir brauchen den Euklidischen Algorithmus nur etwas umzuordnen, um zu der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung des Quotienten  $a_1/a_2$  zu gelangen:

$$\text{Es wird: } \frac{a_1}{a_2} = u_1 + \frac{1}{u_2 + \frac{1}{u_3 + \dots + \frac{1}{u_{n-1}}}}$$



Um anzudeuten, dass die Kettenbruchentwicklung auch auf irrationale Zahlen ausgedehnt werden kann, schreiben wir  $\omega$  an Stelle von  $a_1/a_2$  und setzen die folgenden Gleichungen an:

$$\omega = u_1 + \frac{1}{r_1}$$

$$\frac{1}{r_1} = u_2 + \frac{1}{r_2}$$

$$\frac{1}{r_2} = u_3 + \frac{1}{r_3}$$

$$\omega = u_1 + \frac{1}{u_2 + \frac{1}{u_3 + \dots}}$$

Hier bedeuten die  $u_1, u_2$  wieder ganze Zahlen, die  $r_1, r_2, \dots$  positive echte Brüche, die ersteren bezeichnet man als Teilnenner, die letzteren wollen wir Teilreste nennen. Brechen wir den Kettenbruch an einer beliebigen Stelle ab, so erhalten wir einen „Näherungswert“ für die Zahl  $\omega$ . Die Näherungswerte sind rationale Brüche von der Form  $\frac{p}{q}$ . Wir haben

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{u_1}{1}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{u_1 u_2 + 1}{u_2}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = u_1 \left( \frac{u_2 + \frac{1}{u_3}}{\frac{u_2 + 1}{u_3}} \right) + 1 = \frac{u_1 u_2 u_3 + (u_1 + u_3)}{u_2(u_3 + 1)}$$

Von den Näherungsbrüchen gehen wir zu Näherungspaaren über, in dem wir

die ersteren je in einen Zähler und Nenner  
spalten, die relativ prim zu einander sind.  
Die ersten Näherungspaare werden sein.

$$p_1 = a, \quad q_1 = 1$$

$$p_2 = a, a_2 + 1, \quad q_2 = a_2.$$

Die Reihe der Näherungspaare setzen  
wir noch nach rückwärts in geeigneter Wei-  
se fort, indem wir definieren:

$$p_0 = 1, \quad q_0 = 0$$

$$p_{-1} = 0, \quad q_{-1} = 1.$$

Dr. d. 31. §. Zwischen den aufeinander fol-  
genden Näherungsbrüchen besteht nun  
die folgende einfache Recursionsfor-  
mel:

$$1) \quad \frac{p_r}{q_r} = \frac{a_r p_{r-1} + p_{r-2}}{a_r q_{r-1} + q_{r-2}}.$$

Wir beweisen dieselbe durch vollstän-  
dige Induction, nehmen also an, dass  
dieselbe Formel für den  $(r-1)$ ten Nähe-  
rungsbruch richtig sei, dass also:

$$\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}} = \frac{a_{r-1} p_{r-2} + p_{r-3}}{a_{r-1} q_{r-2} + q_{r-3}} \text{ sei.}$$

Nun entsteht doch der  $(r-1)$ te Näherungs-  
bruch, wenn wir den Nennerbruch mit  
der Zahl  $a_{r-1}$ , der  $r$ te, wenn wir

ihn mit der Zahl  $u_r$  abbrechen. Der  $r$ te Näherungsbruch, können wir auch sagen, entsteht aus dem  $(r-1)$ ten, wenn wir  $(u_{r-1})$  durch  $(u_{r-1} + \frac{1}{u_r})$  ersetzen.

Thun wir dieses in der Formel für  $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$ , so ergibt sich, da  $p_{r-2}, q_{r-2}, p_{r-3}, q_{r-3}$  die Zahl  $(u_{r-1})$  nicht mehr enthalten:

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{(u_{r-1} + \frac{1}{u_r}) p_{r-2} + p_{r-3}}{(u_{r-1} + \frac{1}{u_r}) q_{r-2} + q_{r-3}} = \frac{u_r p_{r-1} + p_{r-2}}{u_r q_{r-1} + q_{r-2}}$$

Berücksichtigt man noch, daß die Formel 1) für  $r=1$  richtig ist, so ist sie damit für jedes  $r$  bewiesen.

Wir zeigen ferner, daß die Recursionsformel nicht nur für die Näherungsbrüche, sondern auch für die Näherungspaare besteht, daß also:

$$1) \quad p_r = (u_r p_{r-1} + p_{r-2})$$

$$2) \quad q_r = (u_r q_{r-1} + q_{r-2})$$

Letzteres wird dann zutreffen, wenn die rechten Seiten von 2) relativ prim sind. Wir bezeichnen dieselben vorläufig mit  $p'_r, q'_r$  und haben dann:

$$(p'_r q'_{r-1} - q'_r p'_{r-1}) = -(p_{r-1} q_{r-2} - q_{r-1} p_{r-2})$$

Durch die wiederholte Ausführung der

selben Rechnung folgt

$$(-p'_r q_r - 1 - q'_r p_r - 1) = (-1)^r (p_0 q_{r-1} - q_0 p_{r-1}) = (-1)^r.$$

$p'_r$  und  $q'_r$  können also keinen gemeinsamen Teiler haben; es ist daher wirklich  $p_r = p'_r$ ,  $q_r = q'_r$  und die Formel 2) ist bewiesen.

Die gleichzeitig bewiesene Relation:

$$3) p_r q_{r-1} - q_r p_{r-1} = (-1)^r$$

wird als Determinantensatz der Kettenbrüche bezeichnet.

Nach 2) ergibt sich  $p_r$  aus  $p_{r-2}$  durch  $u_r$ -malige Hinzufügung von  $p_{r-1}$  etc. Bei diesem Verfahren liegt es nahe, zwischen das  $r-2$ te und das  $r$ te Näherungspaar noch die folgenden Zahlenpaare einzuschalten:

$$2') \begin{matrix} s p_{r-1} + p_{r-2} \\ s q_{r-1} + q_{r-2} \end{matrix} \quad (s = 1, 2, \dots, (u_r - 1)),$$

welche man offenbar auch so schreiben kann:

$$2') \begin{matrix} p_{r-\sigma} - \sigma p_{r-1} \\ q_{r-\sigma} - \sigma q_{r-1} \end{matrix} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, (u_r - 1)).$$

Diese bezeichnen wir als Nebennäherungspare, die früheren im Gegensatz dazu

auch als Hauptnäherungspaare.

Endlich drücken wir noch die zu entwickelnde Größe  $w$  selbst recurrent mit Benützung der Teilreste  $r_r$  aus. Es war ja

$$w = u_1 + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_r + r_r}$$

$w$  entsteht also aus  $\frac{p_r}{q_r}$ , wenn wir hier  $u_r + r_r$  statt  $u_r$  eintragen; mithin haben wir

$$4) \quad w = \frac{p_r + r_r p_{r-1}}{q_r + r_r q_{r-1}} .$$

Wir benutzen diese Formel, um uns ein Urtheil über die Abweichung des  $r$ -ten Näherungsbruches von  $w_r$  zu verschaffen.

Wir haben:

$$5) \quad w - \frac{p_r}{q_r} = \frac{r_r (-1)^{r-1}}{q_r (q_r + r_r q_{r-1})} .$$

Die Abweichung wird immer kleiner, je weiter wir in der Reihe der Näherungsbrüche vorwärts gehen; denn der Nenner wächst mit wachsendem  $r$ , während der Zähler ein echter Bruch ist. Vor Allem aber sehen wir: Die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche sind abwechselnd grös-

Gleichung 5) diejenigen mit geradem Index auf der Rechten, die mit ungeradem auf der Linken der  $w$ -Geraden. Desgleichen liegen die Nebennäherungspunkte, welche zwischen zwei Hauptnäherungspunkten mit geradem Index eingeschaltet sind, auf der rechten, die anderen auf der linken Seite.

Wir verbinden jeden der Näherungspunkte mit dem Nullpunkte  $O$ . Die Verbindungsstrecke des  $r$ -ten Näherungspunktes heiße  $l_r$ . Speziell sind  $l_1$  und  $l_0$  zwei auf der  $x$  resp  $y$ -Axe aufgetragene Strecken von der Länge 1. Jeder Strecke  $l_r$  kommt eine gewisse Richtung und Größe zu. Es ist nun namentlich von der Mechanik her bekannt, daß man mit Strecken eine Operation vornehmen kann, welche man passend als Addition bezeichnet. Zwei Strecken addiren heißt: Den Anfangspunkt der einen an den Endpunkt der anderen ansetzen. Das Resultat der Addition ist die vom Anfangspunkte dieser nach dem Endpunkte jener

gezogene Verbindungsstrecke. Der moderne Name für Streckenrechnung ist Vectoranalysis.

Frei. d. 1. Bl. Auf diese Streckenrechnung weisen uns unsere Recursionsformeln hin. Wir behaupten: es entsteht der Vector  $l_r$  des  $r^{\text{ten}}$  Hauptnäherungspunktes aus dem Vector  $l_{r-2}$ , wenn wir zu diesem den Vector  $l_{r-1}$   $u_r$ -mal addiren, und: es entsteht der Vector  $l$  eines Nebennäherungspunktes, wenn wir zu  $l_{r-2}$  den Vector  $l_{r-1}$   $\rho$ -mal addiren. Oder, in den Symbolen der Streckenrechnung ausgedrückt:

$$l_r = l_{r-2} + u_r l_{r-1} \text{ bez.}$$

$$l = l_{r-2} + \rho l_{r-1}.$$

In der That sind diese Gleichungen nichts anderes als unsere früheren Gleichungen 2) und 2'). Spalten wir sie nämlich in „Componenten“ d. h. projiciren wir die Strecken auf die  $x$ - und  $y$ -Axe, so ergeben sich gerade jene Recursionsformeln.

Wir wollen auch der Geraden  $w$  einen Vector ( $L$ ) zuordnen, welcher der Gl. (4) entsprechend gegeben ist durch

$$4') \quad L = l_r + r_r l_{r-1}.$$

Nun können wir die Reihe der successiven Näherungspunkte nach folgender Regel geometrisch bestimmen. Wir beginnen in dem Punkte  $p_{r-1}, q_{r-1}$  und setzen an diesen die Strecke  $l_0$   $u_1$ -mal an. Wir kommen dadurch zu  $p_1, q_1$ ; die Verbindungsstrecke von  $O$  nach  $p_1, q_1$  ist  $l_1$ . Dann gehen wir zum Punkte  $p_0, q_0$  über und tragen an diesen die Strecke  $l_1$   $u_2$ -mal an, wodurch wir nach  $p_2, q_2$  gelangen. Die Strecke von  $O$  nach  $p_2, q_2$  heisst  $l_2$ . Folyt tragen wir an  $p_1, q_1$   $u_3$ -mal die Strecke  $l_2$  ab u. s. f. Jedesmal ziehen wir die Geraden, welche von dem  $r$ -ten nach dem  $(r+2)$ -ten Näherungspunkte führen, aus. Zusammen bilden sie zwei Polygonzüge, einen rechten und einen linken. Die Ecken derselben sind die Hauptnäherungspunkte. Die Nebennäherungspunkte aber sind einfach die sonstigen auf den Polygonzügen gelegenen Gitterpunkte. Betrachten wir nämlich die Polygonseite, welche von  $p_{r-2}, q_{r-2}$  nach  $p_r, q_r$  hinführt. Dieselbe läuft der



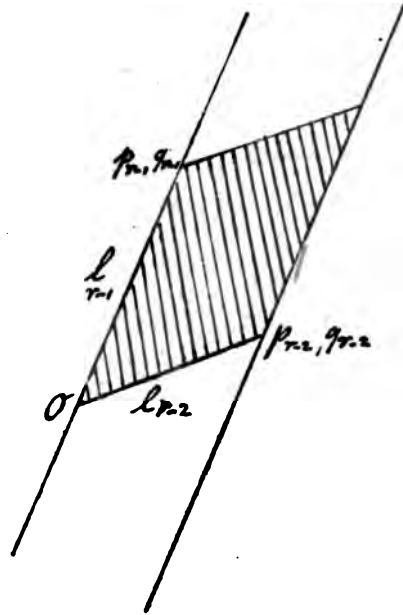
Strecke  $l_{r-1}$  parallel. Die Strecke  $l_{r-1}$  selbst enthält in ihrem Innern keinen Gitterpunkt, es bedeutet dieses nichts Anderes, als wenn wir oben sagten: Die Zahlen  $p_{r-1}, q_{r-1}$  sind relativ prim. Desgleichen können wir bei einmaligem Abtragen von  $l_{r-1}$  an  $p_{r-1}, q_{r-2}$  keinen Gitterpunkt treffen. Wohl aber ist der Endpunkt der abgetragenen Strecke ein Gitterpunkt  $n$ . zw. der erste zwischen dem  $(r-2)$ ten und  $r$ ten Hauptnäherungspunkt eingeschaltete Nebennäherungspunkt. Indem wir so fortfahren sehen wir, daß auf unserer Polygonseite im Ganzen  $u_{r-1}$  Gitterpunkte liegen, und daß dieses gerade die  $u_{r-1}$  zwischen  $(r-2)$  und  $(r)$  eingeschalteten Nebennäherungspunkte sind.

Die Zahlen  $u_r$  haben wir bisher stillschweigend aus der Rechnung übernommen. Es erübrigt noch, auch diese geometrisch zu bestimmen. Das gelingt, wenn wir die  $w$ -Linie, welche sich zwischen unsern Polygonzügen hindurchzieht, berücksichtigen.

Die Gleichung 4) zeigt, dass, wenn wir von  $p_{r-2}$ ,  $q_{r-2}$  den Vector  $l_{r-1}$ , statt  $u_r$ -mal ( $u_r+1$ )-mal auftragen, wir die  $w$ -Linie passiren würden. In der That dürfen wir nach jener Gleichung an  $l_r$  nur einen Theil ( $r_r$ ) von  $l_{r-1}$  ansetzen, um in einen Punkt von  $w$  zu gelangen. Manthin bedeutet  $u_r$  das grösste Multiplum von  $l_{r-1}$ , welches ich zum Punkte ( $r-2$ ) addiren darf, ohne die  $w$ -Gerade zu treffen. Dieses die geometrische Definition der Zahlen  $u_r$ !

Unsere Beschreibung der Polygonzüge ist aber bisher noch recurrent und daher nicht sehr übersichtlich. Wir erhalten sie mit einem Schlage, wenn wir folgende Betrachtungen anstellen, bei denen wir uns  $w$  zuvörderst als irrationale Grösse denken, so dass die beiden Polygonzüge auf den beiden Seiten der  $w$  Linie in's Unendliche laufen: Das Parallelogramm, welches  $O$  zu einer Ecke und  $l_{r-2}$ ,  $l_{r-1}$  zu Seiten hat, ist ein Elementarparallelogramm; Der Flächeninhalt desselben beträgt

nämlich 1 / nach dem Determinantenkennsatze der Kettenbrüche (s. Gl. 3) und seine Ecken sind Gitterpunkte. Dasselbe kann in seinem Innern keinen Gitterpunkt enthalten, sonst könnten wir nämlich nicht, wie es nach der Definition der Elementarparallelogramme möglich sein muß, durch Verschiebung desselben ein Parallelogitter erhalten, welches sämtliche Gitterpunkte der Ebene zu Eckpunkten hat. Aus unserem Elementarparallelogramm erhalten wir nun durch fortgesetzte Anreinanderreichung congruenter Parallelogramme (vergl. die Figur) einen „Elementarstreifen“. Dieser kann ebenso wenig wie das einzelne Parallelogramm einen Gitterpunkt im Innern



enthalten. Nun fassen wir den in der vorhergehenden Figur von unsern beiden Polygonzügen eingeschlossenen Raum in's Auge. Dieser lässt sich in einzelne (übrigens wechselweise übereinander greifende) Stücke von Elementarstreifen zerlegen. Daher findet sich auch zwischen unsern Polygonzügen kein einziger Gitterpunkt.

Nun zerlegt unsere  $w$ -Gerade die Gitterpunkte des Quadranten zwischen der positiven  $x$ - und  $y$ -Achse in zwei Klassen, in solche, welche links, und solche, welche rechts von der  $w$ -Geraden liegen. Betrachten wir den von den ersteren gebildeten Punkthaufen. Sein Umrisspolygon besteht zunächst aus der positiven  $y$ -Achse von  $y = \infty$  bis  $y = 1$ ; des Weiteren ist das Umrisspolygon identisch mit unserem linken Polygonzuge. Der grösseren Anschaulichkeit wegen, können wir etwa in den Gitterpunkten dieses Haufens Stifte befestigt denken und einen Faden um die Gesamtheit dieser Stifte

herumschlingen. Kraff gezogen nimmt derselbe genau die Gestalt unseres linken Polygonzuges an. In derselben Weise verfahren wir mit dem rechts von der  $w$ -Geraden gelegenen Punkthaufen. Sein Umrisspolygon bez. ein herumgeschlungenes Faden liefert uns den rechten Polygonzug. Dies ist die einfache hier zugebende Definition, von der wir in der Folge vielfach Gebrauch machen werden.

Do. d. 8. II. Wir haben noch anzugeben, welche Besonderheiten eintreten, wenn wir  $w$  gleich einer rationalen Grösse  $\frac{p}{q}$  annehmen. Die  $w$ -Linie zerlegt die Gitterpunkte zwar wiederum in zwei Klassen, in links bez. rechts gelegene Punkte. Dabei bleiben aber noch die Gitterpunkte auf der  $w$ -Linie selbst übrig, welche wir nach Belieben der einen oder anderen Klasse zurechnen können. Thun wir das erstere (fig 1), so müssen wir zu unserem linken Umrisspolygon das Stück der  $w$ -Geraden von dem letzten Fäden-

Punkte  $(p_n, q_n = \alpha, \beta)$  bis  $\infty$  hinzurechnen.

Das rechte Um-  
riss polygon läuft  
dann nach  $m_2$   
seiner geometri-  
schen Constru-  
tion gleichfalls  
in eine unend-  
lich lange Streck-  
ke aus, welche  
von  $p_{n-1}, q_{n-1}$  pa-  
rallel zur  $w$  Ge-  
raden in's Um-  
endliche reicht.  
Rechnen wir aber  
den rationalen  
Punkt  $\alpha, \beta$  und  
die Vielfachen  
desselben  $(m\alpha, m\beta)$   
zu den rechts von  
 $w$  gelegenen Punk-  
ten, so enthält das  
rechte Polygon die  
unendlich lange  
Seite  $\alpha, \beta$  bis  $\infty$ , während das linke Poly.

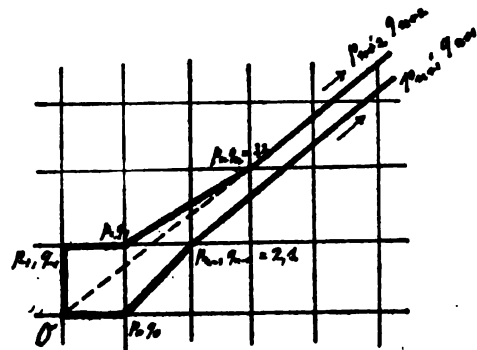


Fig. 1.  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ .

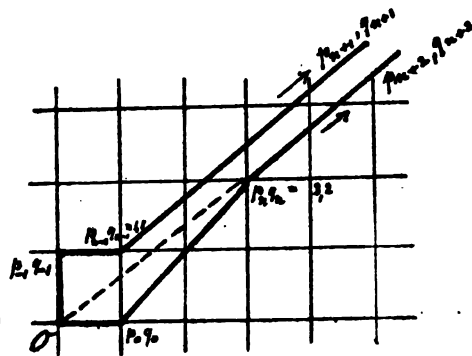


Fig. 2.  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ .

gon die Seite  $p_{r-2}, q_{r-2}$  bis  $\infty$  bekommt, welche der  $w$ -Geraden parallel ist.

Beidemale liegt zwischen den Polygonzügen ein Elementarstreifen, im ersten Fal-  
lerechts, im zweiten links von der  $\square$ -  
Linie.

Die geometrische Construction des Kettenbruches führt uns so noch etwas weiter, als die ursprüngliche Berechnung, in dem sie uns in den unendlich fernen Ecken der Polygone noch zwei neue Näherungspunkte liefert. Wir haben somit, wie oben an den Anfang des Kettenbruches die Näherungspunkte  $p_0, q_0$  und  $p_{-1}, q_{-1}$ , jetzt auch an das Ende desselben zwei ergänzende Näherungspunkte,  $p_{n+1}, q_{n+1}$  und  $p_{n+2}, q_{n+2}$  hinzugefügt, welche beide im Unendlichen liegen.

Wir können auch arithmetisch zu ihnen gelangen, wenn wir uns das Abbrechen des Kettenbruches dadurch hervorgebracht denken, daß auf den Teilnen-  
ner  $u_n$  eine Zahl  $u_{n+1} = \infty$  folgt.

Halten wir dann die Gültigkeit der Recursionsformeln auch für  $r > n$

aufrecht, so ergibt sich der Punkt

$$p_{n+1} = (u_{n+1} p_n + p_{n-1}) = \infty \quad \text{mit } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = w.$$

$$q_{n+1} = (u_{n+1} q_n + q_{n-1}) = \infty$$

Dieselben Werte erhalten wir, wenn wir noch  $u_{n+2}$  ganz beliebig wählen, aus der Recursionsformel auch für  $p_{n+2}$ ,  $q_{n+2}$ , was mit unserer Construction übereinstimmt.

Auch die Möglichkeit der zwei verschiedenen Constructionen in Figur 1) und 2) läßt sich leicht arithmetisch begreifen. Haben wir nämlich einen Kettenbruch mit  $(u_n > 1)$ , so können wir statt  $\frac{\alpha}{\beta} = u_1 + \frac{1}{u_2 + \dots + \frac{1}{u_n}}$  schreiben  $\frac{\alpha}{\beta} = (u_1 + \frac{1}{u_2 + \dots + \frac{1}{(u_n - 1) + \frac{1}{\beta}}})$

haben wir aber  $(u_n = 1)$ , so können wir

$$\text{für } \frac{\alpha}{\beta} = u_1 + \frac{1}{u_2 + \dots + \frac{1}{u_{n-1} + \frac{1}{\beta}}} \quad \text{setzen } \frac{\alpha}{\beta} = u_1 + \frac{1}{u_2 + \dots + \frac{1}{(u_{n-1} + 1)}}$$

Wir haben es also allemal in der Hand, durch diese kleine Umänderung dem Kettenbruch nach Belieben eine gerade oder ungerade Anzahl von Gliedern zu geben. Geben wir ihm eine ungerade



Anzahl, bewirken also, dass  $n$  ungerade ist, so gehört  $p_n, q_n$  (wie alle Näherungspunkte mit ungeradem Index) zum linken Polygonzuge und wir kommen auf die Figur 2. Geben wir ihm eine gerade Anzahl, so wird  $p_n, q_n$  ein Punkt des rechten Polygonzuges, und wir erhalten die Figur 2.

Wir bemerken noch, dass die Annahme  $\alpha$  und  $\beta > 0$  keine wesentliche ist. Im entgegengesetzten Falle können wir nämlich dieselben Constructionen in einem der anderen Quadranten ausführen.

Hiernach kommen wir noch einmal auf die Diophantische Gleichung  $\alpha^2 - \beta^2 = 1$  zurück. Wir werden die Gesammtheit der Lösungen in zwei Kategorien teilen. Wir können nämlich entweder annehmen, dass

a)  $\alpha > \beta$  oder dass b)  $\alpha < \beta$ ;  
dann wird auch, von den allerersten Fällen, die uns nicht interessieren, abgesehen, gleichzeitig sein:

a)  $\gamma > \delta$  bez. b)  $\gamma < \delta$ .

Um alle Fälle a) aufzuzählen, nehmen

wir  $\alpha$  und  $\gamma$  beliebig (natürlich relativ prim) an und entwickeln  $\frac{\alpha}{\gamma}$  in einen Kettenbruch von einer geraden Anzahl von Gliedern. Den vorletzten Näherungsbruch nennen wir  $\frac{\alpha}{\gamma}$ , während der letzte  $\frac{\alpha'}{\gamma'}$  wird. Dann haben wir  $\alpha \delta - \beta \gamma = (-1)^n + 1$  und gleichzeitig (wegen  $p_n > p_{n-1}$ )  $\alpha > \beta$ . Um alle Fälle b.) zu gewinnen, nehmen wir  $\beta$  u.  $\delta$  relativ prim und im Übrigen beliebig an, entwickeln  $\frac{\beta}{\delta}$  in einen Kettenbruch von einer ungeraden Gliederzahl; den vorletzten Näherungsbruch nennen wir  $\frac{\beta}{\delta}$ . Dann haben wir  $\beta \gamma - \alpha \delta = (-1)^n$  oder  $\alpha \delta - \beta \gamma = (-1)^{n+1} + 1$  und gleichzeitig  $\alpha < \beta$ .

Endlich kommen wir zu unserer Ausgangsfrage zurück: Wie können wir in ein gegebenes Punktgitter Parallelen-gitter einzeichnen? Als Beziehung zwischen den Koordinaten eines Gitterpunktes im neuen Gitter  $(x', y')$  und den Koordinaten desselben Punktes im alten Gitter  $(x, y)$  fanden wir früher (pg. 3)

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned}$$

wobei  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  sein musste und  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ganze und paarweise relativ prime Zahlen wären. Wir denken sie uns diesen Bedingungen entsprechend irgend, wie gegeben. Setzen wir  $\frac{x^2}{y} = w, \frac{x^2}{y^2} = w'$ , so lautet die Beziehung zwischen  $w$  und  $w'$  folgendermassen:

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$$

Diese Beziehung können wir nun auf Grund unserer neuesten Entwicklungen auch in die Gestalt eines Kettenbruches umsetzen. Zum Beweise unterscheiden wir die obigen Fälle a) und b).

Im Falle a) ( $\alpha > \beta$ ) entwickeln wir  $\frac{\alpha}{\gamma}$  in einen Kettenbruch:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = (u_1 + \frac{1}{u_2 + \dots \frac{1}{u_n}}$$

von einer geraden Gliederzahl. Wir setzen dann, in Übereinstimmung mit den genannten Bedingungen für  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , wie oben:

$$\alpha = p_n, \gamma = q_n, \beta = p_{n-1}, \delta = q_{n-1}.$$

Daneben betrachten wir den folgenden Kettenbruch:

$$\alpha) \left( u_1 + \frac{1}{u_2 + \dots + \frac{1}{(u_n + \frac{1}{w_1})}} \right)$$

Derselbe stimmt in den  $n-1$  ersten Gliedern mit dem vorhergehenden überein. Daher sind auch seine  $n-1$  ersten Näherungsbrüche identisch mit denen des vorhergehenden, der  $n$ te Näherungsbruch (d. h. der Wert des ganzen Kettenbruches) entsteht aus dem  $n$ ten Näherungsbruche des vorhergehenden durch Vertauschung von  $u_n$  mit  $(u_n + \frac{1}{w_1})$ . Daher ist der Wert unseres Kettenbruches  $\alpha)$  gleich

$$\frac{(u_n + \frac{1}{w_1}) p_{n-1} + p_{n-2}}{(u_n + \frac{1}{w_1}) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n + \frac{p_{n-1}}{w_1}}{q_n + \frac{q_{n-1}}{w_1}} = \frac{\alpha w_1 + \beta}{\gamma w_1 + \delta}$$

Unser Kettenbruch  $\alpha)$  hat also den Wert  $w$ .  
Im Falle  $\beta)$  ( $\alpha < \beta$ ) entwickeln wir  $\frac{\beta}{\gamma}$  in einen Kettenbruch  $\frac{\beta}{\gamma} = (u_1 + \frac{1}{u_2 + \dots + \frac{1}{u_n}}$

von ungerader Gliederzahl  $n$ , wobei, wie oben,  $\beta = p_n$ ,  $\gamma = q_n$ ,  $\alpha = p_{n-1}$ ,  $\delta = q_{n-1}$  ge-

setzt werden darf. Daneben stellen wir den folgenden Kettenbruch:

$$\left( u_1 + \frac{1}{u_2 + \dots + \frac{1}{(u_n + w')}} \right)$$

Sein Wert ist

$$\frac{(u_n + w') p_{n-1} + p_{n-2}}{(u_n + w') p_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n + w' p_{n-2}}{q_n + w' q_{n-2}} = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$$

Unser Kettenbruch b) hat also wieder den Wert  $w$ . Wir haben also das zusammenfassende Resultat: Es ist  $w$  mit einer Grösse  $w'$  verbunden durch die Gl:

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta},$$

wo zwischen den ganzen Zahlen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  die Relation besteht  $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ , so kann man die Abhängigkeit der Grösse  $w$  von  $w'$ , je nachdem der Fall a) oder b) vorliegt, durch den Kettenbruch a) oder b) darstellen.

Die Rechenoperationen, durch welche wir nach den Formeln a) oder b)  $w$  successive aus  $w'$  herstellen, wollen wir nun symbolisch mit Namen belegen. Es bedeute  $T w'$  den Übergang zum recipro-

ken Werte

$$T w' = \frac{1}{w'},$$

und  $S w'$  die Hinzufügung der Einheit

$$S w' = w' + 1.$$

Dann können wir den Kettenbruch in die folgende symbolische Form schreiben:

$$w = S^{u_1} T S^{u_2} T \dots S^{u_n} T w' \quad \text{im Falle (a),}$$

$$w = S^{u_1} T S^{u_2} T \dots S^{u_n} w' \quad \text{im Falle (b).}$$

Bei den Formeln ist gemeinsam, daß die Operation  $T$  eine gerade Anzahl von Malen (nämlich  $n$  mal bez.  $n-1$  mal) vorkommt. Dies folgt übrigens mit Notwendigkeit schon daraus, daß die Determinante der Substitution

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta},$$

welche  $+1$  ist, gleich wird dem Produkte aus den Determinanten aller einzelnen Substitutionen  $S$  und  $T$ . Nun hat  $S$  die Determinante  $|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}| = +1$  und  $T$  die Determinante  $|\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}| = -1$ . Daher muß  $T$  eine gerade Anzahl von Malen vorkommen.

Unsere vorstehende symbolische Schreibweise des Kettenbruches enthält einen wichtigen Satz, welchen wir in der

Sprache der Substitutionentheorie folgendermassen aussprechen:

Jede ganzzahlige Substitution  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  von der Determinante 1 lässt sich zusammensetzen, indem man die Operationen  $S$  und  $T$  als „erzeugende Operationen“ in geeigneter Combination und Wiederholung anwendet.

Derselbe Satz gilt natürlich auch, wenn wir von den gebrochenen Substitutionen der  $w$  und  $w'$  übergehen zu den homogenen Substitutionen der Variablen  $(x, y)$  und  $(x', y')$ . Auch diese lassen sich aus den Substitutionen:

$$S \begin{vmatrix} x = x' + y' \\ y = y' \end{vmatrix} \text{ und } T \begin{vmatrix} x = y' \\ y = x' \end{vmatrix}$$

erzeugen nach dem Schema:

$$(x, y) = S^{\mu_1} T S^{\mu_2} T \dots S^{\mu_n} T (x', y') \text{ im Falle a)}$$

$$(x, y) = S^{\mu_1} T S^{\mu_2} T \dots S^{\mu_n} (\alpha', y') \text{ „ „ b).}$$

Frei. d. g. VII. Diese successive Erzeugung der Substitutionen hat auch eine einfache geometrische Bedeutung. Wir wollen uns dabei auf den Fall a) beschränken, weil der Fall b) ebenso zu behandeln ist. Für unsern Zweck ist es bequem, neben  $S$  als

zweite Operation die folgende eingeführt:

$$S' = T S T \quad \left| \begin{array}{l} x = x' \\ y = x' + y' \end{array} \right.$$

Dann ersichtlich

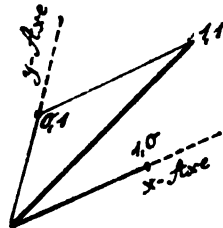
$$T S^{-1} T, T S T, T S T \dots = S^{-1} u$$

so drückt sich unsere Substitution  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

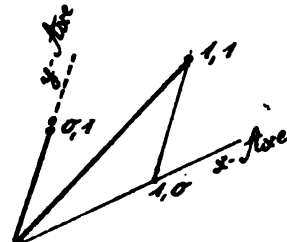
durch die Operation  $S$  und  $S'$  folgendermassen symbolisch aus:

$$(x, y) = S(u_1, S'(u_2, S(u_3, S'(u_4, \dots, S(u_{n-1}, S'(u_n(x', y')))))$$

Um diese Formel geometrisch zu deuten, führen wir den Begriff: „Elementarfigur des Coordinatensystems“ ein. Wir verstehen unter der Elementarfigur den Inbegriff zweier Vektoren, des Einheitsvectors der  $x$ - und der  $y$ -Achse. Bei den Operationen  $S$  und  $S'$  wird diese Elementarfigur in einfacher Weise geändert. Bei



Operation  $S$ ;



Operation  $S'$

$$S \left\{ \begin{array}{l} x = x' + y' \\ y = y' \end{array} \right\}$$

nämlich bleibt der  $x$ -Vektor un geändert (der Punkt  $x' = 1, y' = 0$  hat im alten System



37.

die Koordinaten  $x=1, y=0$ ), der  $y$ -Vector dagegen wird geändert u. zw. entsteht der neue  $y$ -Vector aus dem alten, indem man zu dem letzteren den  $x$ -Vector hinzufügt, (der Punkt  $x'=0, y'=1$  hat im alten System die Koordinaten  $x=1, y=1$ .) Bei der Operation  $S'$  findet das Umgekehrte statt. In gleicher Weise wird  $S''$  bez.  $S'''$  den Übergang von einer Elementarfigur zu einer neuen bedeuten, wobei man zu dem  $y$ - (bez.  $x$ -) Vector  $n$ -mal den  $x$ - (bez.  $y$ -) Vector hinzufügt, während man den  $x$  (bez.  $y$ -) Vector ungeändert lässt. Durch gestimmte Wiederholung solcher Übergänge entsprechend unserer symbolischen Gleichung, entsteht schließlich die Elementarfigur des  $x', y'$  Systems aus der des  $x, y$  Systems.

Ein Zahlenbeispiel wird dies erläutern. Es sei

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Da hier vermöge  $8 > 5$  der Fall a vorliegt, entwickeln wir  $8/3$  in einen Kettenbruch von gerader Gliedernzahl

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}.$$

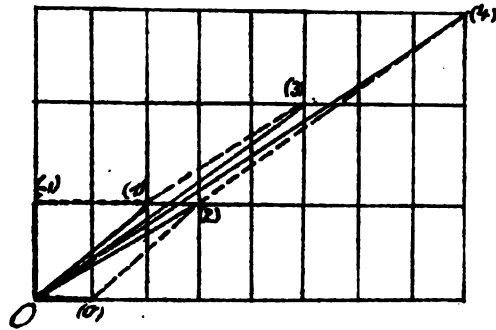
Unsere Operationsvorschrift lautet daher

$$(x, y) = S^2 S' S S' (x', y').$$

gleichzeitig mit der Kettenbruchentwicklung ziehen wir auch ihr geometrisches Gegenbild, die Umrisspolygone, in Betracht. Im Anschluss an diese verlaufen unsere Operationen folgendermassen:

Die ursprüngliche Elementarfigur besteht aus den Strecken  $O(0)$  und  $O(-1)$ . Die Operation  $S^2$  bedeutet, dass wir die erstere Strecke, den  $y$ -Vector, längs der Polygonseite  $\overline{(-1)(1)}$  ver-

schieben. Die neue Elementarfigur besteht aus den Strecken  $O(0)$ ,  $O(1)$ . Der Operation  $S'$  entsprechend haben wir an den Vector



$O(0)$  den Vector  $O(1)$  anzusetzen d. h. wir haben den ersteren längs der Polygonseite  $\overline{(0)(2)}$  zu verschieben. Die so entstehende Elementarfigur wird gebildet von  $O(2)$  und  $O(1)$ . Der nächste Schritt führt zu der Figur  $O(2)$  und  $O(3)$ , der letzte endlich zu  $O(4)$

und  $O(\alpha)$  d. h. zu der Figur des  $x', y'$ -  
 Koordinatensystems.

Wir erkennen: Die Erzeugung der Substi-  
tution  $(\alpha \beta)$  aus der Wiederholung und  
Combination der beiden Operationen  $S, S'$   
kommt darauf hinaus, daß wir die Ele-  
mentarfigur des neuen Systems aus der-  
jenigen des alten erhalten, indem wir  
den  $y$ - und  $x$  Vector des Koordinaten-  
systems alternirend an den successi-  
ven Seiten der beiden zur Kettenbruch-  
entwicklung von  $\frac{\alpha}{\beta}$  gehörenden Um-  
risspolygone entlang schieben.

Analog natürlich, wenn der Fall  $\beta)$   
 vorliegen sollte. —

Wir kommen nun zu einer letzten Ei-  
 genschaft der Kettenbruchentwickel-  
 lung, welche von Lagrange in seinen  
 „Additions à l'algèbre d'Euler“  
 1748, (Werke Bd 7) entwickelt worden  
 ist. Diese Arbeit betrifft ganz besonders  
 die Theorie der Kettenbrüche nach de-  
 ren Bedeutung für die Zahlentheorie,  
 sie ist in dieser Hinsicht grundle-  
 gend gewesen.

Es sei  $w$  irgend eine Zahl, welche wir der Einfachheit wegen als positiv und irrational annehmen. Wir betrachten die „ $w$ -Linie“, deren Gleichung  $wy - x = 0$  ist. Verstehen wir unter  $x$  und  $y$  ganze Zahlen, so kann die ganzzahlige lineare Form

$$wy - x$$

den Wert Null offenbar nicht annehmen. Daher kann man nach einem Minimum von

$$|wy - x|$$

fragen. Allerdings wird es ein absolutes Minimum nicht geben können; lässt man nämlich die ganzen Zahlen  $x$  und  $y$  in geeigneter Weise immer grösser werden, so wird man sich dem Werte 0 unbegrenzt nähern.

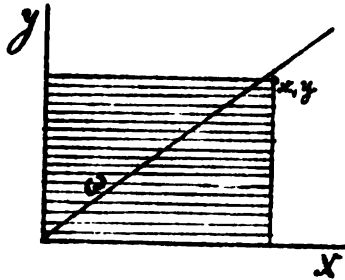
Lagrange fragt daher nach einem relativen Minimum, d. h. nach solchen ganzen Zahlen  $x, y$ , für welche immer

$$|wy - x| \leq |wy' - x'|,$$

falls nur  $y' \leq y, x' \leq x$ . Bemerkt man, dass in rechtwinkligen  $x, y$ -Coordinationen

$$\left| \frac{wy - x}{w^2 + 1} \right|$$

den Abstand des Punktes  $x, y$  von der  $w$ -Geraden bedeutet, so kann man die Frage geometrisch folgendermassen stellen: Es soll ein Gitterpunkt  $x', y'$  gefunden werden, welcher unter allen Gitterpunkten



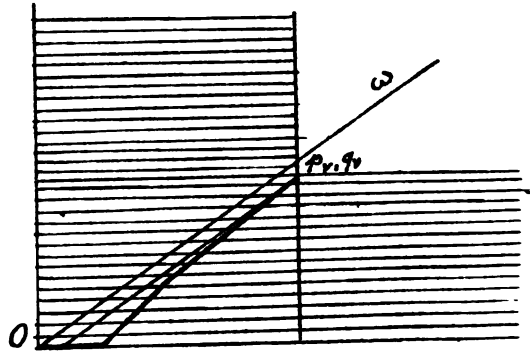
ten die im Innern oder auf dem Rande des Rechtecks mit den Seiten  $x', y'$  liegen, den kleinsten Abstand von der  $w$ -Linie hat.

Wir werden sehen, dass die Hauptnäherungspunkte  $p_r, q_r$  der Kettenbruchentwicklung

und nur diese die in Rede stehende Eigenschaft besitzen.

Wir wollen übrigens den Punkt  $p_r, q_r$  nicht nur mit den Punkten des Rechtecks, für welche  $x' \leq x$  und  $y' \leq y$  ist, vergleichen, sondern wollen noch die beiden ganzen Streifen hinzunehmen, für welche  $x' \leq x$  oder  $y' \leq y$  ist. (vergl. die Figur, bei welcher wir  $p_r, q_r$  rechts von  $w$  genommen haben). Unsere Be-

Hauptung zerfällt in 2 Teile, sie sagt aus:  
 1.) es liegt in unserem schraffierten Gebiete rechts  
von der  $w$ -Geraden kein Gitterpunkt näher  
an dieser, als  $p_r, q_r$ ; 2.) dasselbe findet  
links von  $w$  statt. Der Beweis ad 1.) ist  
 sehr einfach. Wir ziehen durch  $p_r, q_r$  ei-  
 ne Parallele zur  $w$ -Linie. Es kommen  
 dann nur solche Gitterpunkte für uns  
 in Betracht, welche in dem von dieser  
 Parallelen und  
 der  $w$ -Linie aus  
 dem schraffierten  
 Gebiete aus-  
 geschnittenen schma-  
 len Streifen oder  
 auf seiner Begren-  
 zung liegen. Die-  
 ser Streifen fällt  
 aber ganz zwi-  
 schen die  $w$ -Linie und unseren rechten  
 convexen Polygonzug, also in ein Ge-  
 biet, in welchem, wie wir wissen, über-  
 haupt kein Gitterpunkt enthalten ist.  
 Also ist  $p_r, q_r$  unter allen Gitterpunk-  
 ten des schraffierten Gebietes rechts



von  $w$  der nächste an  $w$ .

Der Beweis ad 2) wird insofern ein wenig umständlicher, als wir hier 2 Fälle unterscheiden müssen.

a) Die Polygonsseite  $(v-1)$  bis  $(v+1)$  enthalte Nebenpunkte der Kettenbruchentwicklung in ihrem Innern, so daß in der Formel

$$(v+1) = (v-1) + u_{v+1}(v)$$

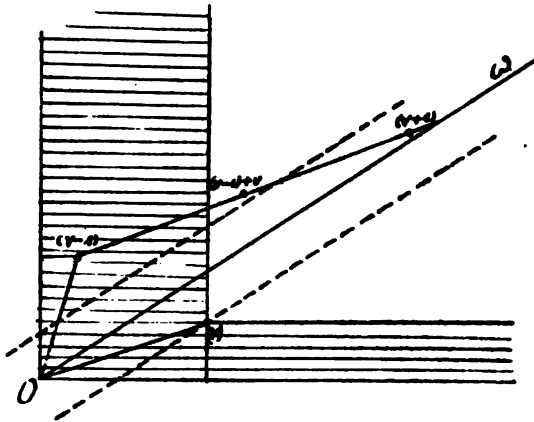
$u_{v+1} > 1$  ist.

b) sie enthalte keine Nebenpunkte, wo dann  $u_{v+1} = 1$  ist.

Wir ziehen jetzt auch links von der  $w$ -Linie eine Paralle-

le zu dieser in demselben Abstände, wie vorher rechts davon. Dieselbe schneidet von der bis  $w$  verlängerten Polygonsseite

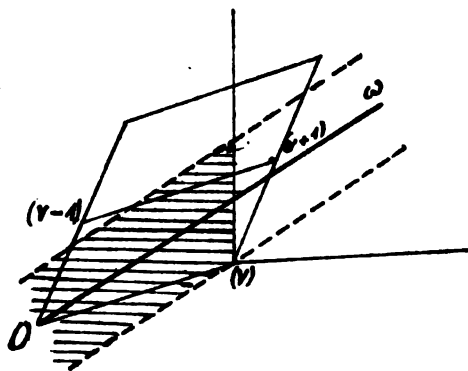
$(v-1)-(v+1)$  ein Stück von der Länge  $0(v)$  ab, wie aus unserer Construction der



Umrisspolygone hervorgeht.

Im Falle a) liegt dieses Stück ganz ausserhalb des schraffirten Gebietes. Denn es reicht von der  $w$ -Linie noch nicht bis an den letzten Nebenpunkt der Seite  $(v-1)-(v+1)$  heran, und dieser liegt seinerseits ausserhalb des schraffirten Gebietes. Daher fällt der von unserer Parallelen und der  $w$ -Linie begrenzte Streifen, soweit er schraffirt ist, in das Gebiet zwischen die  $w$ -Linie und das linke Umrisspolygon. In diesem Teile des Parallelstreifens kann sich also kein Gitterpunkt befinden.

Im Falle b) schneidet unsere Parallele das Umrisspolygon zwischen den Hauptpunkten  $(v-1)$  und  $(v+1)$ . Der schraffirte Teil unseres Parallelstreifens greift jetzt möglicherweise noch mit einem kleinen Dreiecke über das Umrisspolygon hinaus. Während





sich für den übrigen Teil die Frage wie vor-  
her erledigt, bleibt dieses Dreieck besonders zu  
untersuchen. Man setze zu dem Zwecke an  
die Seite  $(v-1)-(v+1)$  des Elementarparalle-  
logrammes  $(0, (v-1), (v+1), (v))$  ein dieses con-  
gruentes Parallelogramm an. Unser fragli-  
ches Dreieck fällt dann ganz in das Innere  
des letzteren. In Folge dessen kann es keinen  
Gitterpunkt enthalten.

Damit ist bewiesen, daß jeder Näherungs-  
punkt  $p_r, q_r$  ein relatives Minimum von  
 $|w y - x|$  liefert.

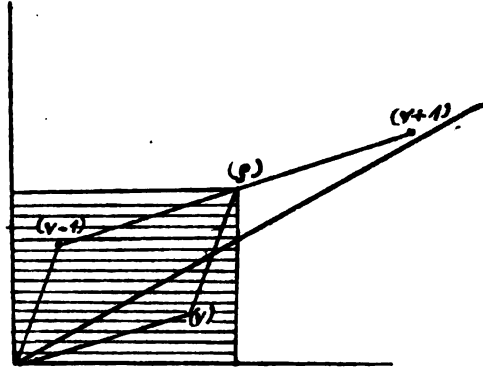
Es bleibt noch umgekehrt zu zeigen, daß  
jeder Gitterpunkt, welcher diese Eigenschaft  
besitzt, ein Näherungspunkt u. zw. ein Haupt-  
näherungspunkt ist.

Wir thun dieses in 2 Schritten und zei-  
gen, daß weder ein Nebenpunkt noch überhaupt  
irgend ein anderer Gitterpunkt  
außerhalb des Umrisspolygons zu einem  
relativen Minimum Anlass geben kann.

1) Wir betrachten die zwischen  $(v-1)$  und  
 $(v+1)$  eingeschalteten Nebenpunkte, deren  
Lage durch

$$(v-1) + \rho(v), \quad \rho = 1, 2, \dots, \frac{v-1}{2}$$

bestimmt von. Construiren wir durch irgend einen dieser Nebenpunkte ( $q$ ) die Parallelen zu den Coordinatenachsen, so enthält das entstehende Rechteck den  $(v)$ ten Hauptpunkt im Innern. Denn nach der vorstehenden Formel werden die Coordinaten von



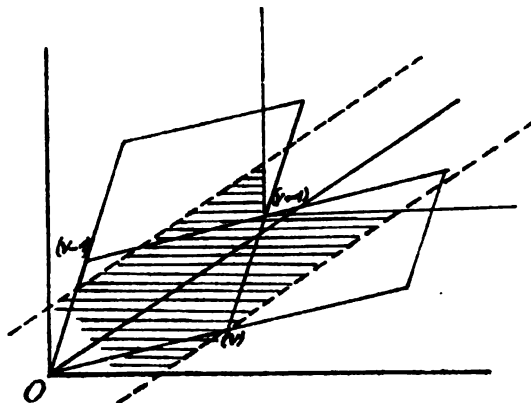
( $q$ ) aus denen von ( $v$ ) durch Hinzufügung positiver Stücke erhalten. Ueberdies hat ( $v$ ) einen kleineren Abstand von  $w$  wie ( $q$ ). Dies haben wir bereits bei der Figur auf pag 43. gesehen. Also liefert ein Nebenpunkt sicher kein relatives Minimum von  $|wy - x|$ .

2.) Denselben Nachweis erbringen wir für irgend welche Gitterpunkte ausserhalb unserer Polygonzüge. In dem Zwecke zeigen wir (was eigentlich viel mehr ist), dass unter allen Punkten, welche näher an  $w$  liegen als ( $v$ ) oder jene

mit den kleinsten Coordinaten  $x, y$  der Punkt  $(r+1)$  ist.

In beiden Seiten der  $w$ -Linie grenzen wir unsere beiden Parallelstreifen ab, in denen die fraglichen Punkte sämtlich enthalten sein müssen. Sodann ziehen wir durch  $(r+1)$  Parallelen zur  $x$ - und  $y$ -Achse. Diese schneiden aus den Parallelstreifen ein Stück aus, welches in der Fi-

gur schraffirt ist. Wir haben zu zeigen, daß in diesem Stück außer  $(r)$  und  $(r+1)$  kein Gitterpunkt enthalten ist.



In der That, set-

zen wir an das Elementarparallelogramm  $(0, (r-1), (r+1), (r))$  zwei congruente Parallelogramme längs der Seiten  $(r-1)(r+1)$  und  $(r)(r+1)$  an, so enthalten diese die beiden Höpfer des schraffirten Gebietes, welche über das erste Parallelogramm herausgreifen in ihrem Innern, wie man solches

im Einzelnen auf Grund unserer Construc-  
tion erkannt. Nun liegen aber im Innern  
der Elementarparallelogramme sicher  
keine Gitterpunkte. Also sind  $(r)$  und  
 $(r+1)$  die einzigen Gitterpunkte auf schraf-  
fitem Gebiet und  $(r+1)$  ist unter allen  
Gitterpunkten, welche näher an  $w$  liegen  
als  $(r)$ , derjenige mit den kleinsten Coor-  
dinaten.

Nun zur Betrachtung eines beliebigen  
Gitterpunktes  $x, y$ , welcher nicht einem  
der Polygonzüge angehört! Die Lücke  
erledigt sich jetzt von selbst. Wir set-  
zen voraus, dass  $(x, y)$  ein relatives Mi-  
nimum von  $|wy - x|$  ergebe. Unter den  
Gitterpunkten, welche eine kleinere  $x$  bez.  $y$ -  
Coordinate haben, als der Punkt  $x, y$ ,  
wird es eine Reihe von Hauptnähe-  
rungspunkten geben. Sei  $(r)$  der letzte  
in dieser Reihe, so dass  $p_r \leq x$  oder  
 $q_r \leq y$ , während  $p_{r+1} > x$ , oder  $q_{r+1} > y$ . Nach  
Annahme ist gleichzeitig  $|wy - x| < |wp_r - q_r|$ .  
In Folge dessen wäre unter den Gitter-  
punkten, welche einen kleineren Ab-  
stand von  $w$  haben als  $(r)$ , nicht  $(r+1)$

sondern  $(x, y)$  derjenige mit den kleinsten Koordinaten. Dies steht aber in Widerspruch mit unserem vorhergehenden Resultat.

Somit ist bewiesen, daß kein anderer Gipfelpunkt ein relatives Minimum unserer linearen Form ergeben kann, ausser den Hauptnäherungspunkten der Kettenbruchentwicklung. Es ist also auch die Umkehrung des Lagrange'schen Satzes vollständig dargethan.

Ich möchte im Anschlusse hieran noch eine Arbeit von Hurwitz (Math. Ann. Bd. 39 pg 279 u. f.) zur Sprache bringen, in welcher die Frage nach den Minimalwerten von  $|wy - x|$  noch etwas weiter geführt wird. Das Resultat von Hurwitz lautet, in unsere Sprechweise übertragen: Man kann den Punkt  $x, y$  unter den Eckpunkten der Unwisspolygone immer so auswählen, daß

$$|wy - x| \leq \frac{1}{\sqrt{5}y}$$

wird. Construiren wir uns diejenigen Curven, welche dem Gleichheitszeichen entsprechen, d. h. die beiden Hyperbeln

$wy^2 - xy = \frac{1}{\sqrt{5}}$  und  $wy^2 - xy = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ;  
 dieselben haben die  $x$ -Achse und  $w$ -Linie zu  
 Asymptoten und grenzen um diese einen  
 schmalen Strei-

fen ab. Der Hur-

witz'sche Satz

sagt dann ein-

fach aus, daß

jedenfalls eini-

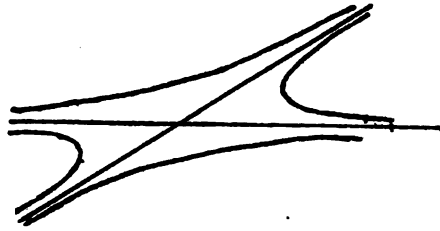
ge Eckpunkte

unserer Polygonzüge in bez. an diesen Strei-

fen reichen. Jedenfalls wird sich auch der

Beweis dieses Satzes bei Benützung unseres

Bildes besonders übersichtlich gestalten.



### I. Hauptteil.

Wir kommen nun zu dem eigentlichen  
 Thema dieser Vorlesung, zu der

### Reductionstheorie der binären quadratischen Formen.

welche wir ein für allemal in die  
 Gestalt setzen.

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

## 1. Geometrische Vorbegriffe.

Der zahlentheoretischen Betrachtung schließ-  
 ken wir einige geometrische Überlegungen  
 von allgemeinem Charakter voraus, wie  
 sie in allerdings viel umfassender Form  
 in der Erlanger Programmschrift: Ver-  
 gleichende Betrachtungen über neuere  
 geometrische Forschungen: (abgedruckt  
 in Ann. Bd. 43) entwickelt worden  
 sind. Es handelt sich darum, die Ge-  
 samtwissenschaft der Geometrie nach  
 allgemeinen mathematischen Gesichts-  
 punkten einzuteilen, nicht darum, die-  
 selbe vom philosophischen Standpunk-  
 te grundsätzlich aufzubauen. In die-  
 sem Sinne nehmen wir für das Folgen-  
 de ein rechtwinkliges Koordinatensystem  
 als gegeben an; übrigens genügt es  
 für unsere Zwecke von der Geometrie  
 der Ebene zu handeln.

Unsere Einteilung ist eine gruppentheo-  
 retische. Wir unterscheiden so viele Arten  
 von Geometrie, als es Gruppen von Ope-  
 rationen giebt, denen wir die geome-  
 trischen Gebilde unterwerfen mögen.

1.) Wir beginnen mit der metrischen oder elementaren Geometrie. Hier betrachten man diejenigen Figuren als gleichwertig, welche sich nur durch die Lage oder durch den Maassstab der Zeichnung unterscheiden. Man lässt also die Operationen der Bewegung und der Ähnlichkeits transformation zu. Ihren analytischen Ausdruck finden sie in den Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l} x = aX + bY + c & a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 \\ y = a'X + b'Y + c' & ab + a'b' = 0 \end{array}$$

Das  $x, y$  und das  $X, Y$ -System sind entweder congruent oder ähnlich, entweder gleichstimmig oder entgegengestimmig.

Die hierdurch umgrenzten Operationen bilden eine Gruppe, welche Hauptgruppe heisst. Die Hauptgruppe umfasst alle diejenigen Operationen, bei denen die inneren Eigenschaften der Figuren ungeändert bleiben. Umgekehrt gehören nur solche Eigenschaften in die Geometrie, welche ungeändert bleiben bei den Operationen



der Hauptgruppe. Durch diese Beziehung zur Hauptgruppe unterscheidet sich die Geometrie der Ebene von einer individuellen Betrachtung der Wertsysteme  $x, y$ . Elementargeometrie, so können wir auch sagen, ist Invariantentheorie der Hauptgruppe.

2.) Neben die Elementargeometrie stellt sich als zweite die affine Geometrie. Ihre Gruppe besteht aus sämtlichen affinen Transformationen, also aus den Umänderungen

$$x = aX + bY + c,$$

$$y = a'X + b'Y + c',$$

wo jetzt die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten in Wegfall kommen.

Sie entstehen aus den Transformationen der Hauptgruppe durch Hinzunahme beliebiger Parallelprojektionen. Die affine Geometrie interessiert sich nur für solche Eigenschaften der Figuren, welche durch affine Operationen nicht zerstört werden.

3.) Die nächst höhere Geometrie ist die projective. Ihre Gruppe besteht

aus den Umänderungen der folgenden Form

$$x = \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}$$

$$y = \frac{a''x + b''y + c''}{a'x + b'y + c'}$$

In den bisherigen Operationen sind hier die Centralprojectionen hinzugekommen. In der projectiven Geometrie sieht man als wesentlich nur solche Eigenschaften an, welche auch bei beliebiger Centralprojection, also bei beliebiger Veränderung des Augenpunktes im Räume und beliebiger Stellung der Projectionsebene erhalten bleiben. — So kann man successive fortgehen, indem man die Gruppe der Geometrie um neue Operationen erweitert und jedesmal die Invariantentheorie dieser erweiterten Gruppe studirt. —

In der metrischen Geometrie ist die wichtigste Invariante die Entfernung in der projection ist sie das Doppelverhältniss. In der affinen Geometrie bleibt neben letzterem auch der Fläch-

cheninhalt der Figuren invariant.

Sehen wir nämlich von den constanten Gliedern in den Transformationsgleichungen ab, deren Hinzunahme nur eine Verschiebung, also eine Transformation der Hauptgruppe, bedeutet, so können wir sie schreiben:

$$x = aX + bY$$

$$y = cX + dY.$$

Sind  $oo, xy, x'y'$  die Ecken eines Dreiecks in ursprünglicher,  $oo, X'Y, X'Y'$  in transformierter Lage, so wird sein Inhalt

$$\frac{1}{2}(xy' - x'y) = \frac{1}{2}(ad - bc)(X'Y' - X'Y).$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks und, da man jede Figur aus einer Anzahl von Dreiecken zusammensetzen kann, auch der Flächeninhalt jeder Figur ändert sich bei einer Transformation also nur um die Determinante der Substitution. Liegt der für das Spätere wichtige Fall vor, daß die Determinante gleich Eins ist, so bleibt der Flächeninhalt schlechtweg invariant.

Im Vorhergehenden gingen wir geometrisch vor, indem wir durch zwei

sire Abstraction von der metrischen Geometrie zur projectiven aufstiegen. Systematischer gestaltet sich noch das umgekehrte Verfahren. Wir suchen zunächst diejenigen Verhältnisse der geometrischen Figuren auf, welche bei allen Umformungen der projectiven Gruppe erhalten bleiben. Um zum Standpunkte der affinen Geometrie überzugehen, adjungiren wir die unendlich ferne Gerade und ziehen dementsprechend nunmehr denjenigen Teil der projectiven Umformungen in Betracht, welche die unendlich ferne Gerade in sich überführen. In entsprechender Weise kommen wir von der affinen zu der metrischen Geometrie, wenn wir die beiden Kreispunkte adjungiren (vergl. auch hierzu das Erlanger Programm).

Dies Verfahren trägt gleichzeitig die Möglichkeit einer Verallgemeinerung in sich. Wir könnten ja bei dem Übergang von der affinen zur metrischen Geometrie auch zwei andere Punkte

der unendlich fernen Geraden ebenso gut festhalten, als gerade die Kreispunkte.

Wir gelangen dann nicht zur gewöhnlichen metrischen Geometrie, sondern zu einer allgemeinen, pseudometrischen (oder besser gesagt, wie Salmon ursprünglich wollte, zu einer quasimetrischen) Geometrie.

Die gewöhnliche metrische Geometrie erweist sich dann als ein spezieller Fall der letzteren.

Sind  $x: y: t$  gewöhnliche homogene gemachte rechtwinklige Koordinaten, so werden die Kreispunkte bekanntlich durch die folgenden Gleichungen bestimmt:  
 $x^2 + y^2 = 0, t = 0$ . Entsprechend lautet der Ausdruck für die Entfernung in der gewöhnlichen Geometrie  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Statt der Kreispunkte wählen wir in der Pseudogeometrie die auf der unendlich fernen Geraden gelegenen Nullpunkte einer beliebigen quadratischen Form, d. h. die Punkte:

$f = ax^2 + bxy + cy^2 = 0, t = 0,$   
als Grundpunkte der Wassbestimmung  
und definieren als Pseudoentfernung

(indem wir wieder  $t = 1$  setzen) den folgenden Ausdruck

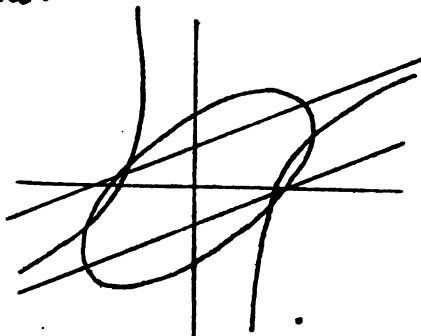
$$r = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2}.$$

Drei Fälle sind dabei zu unterscheiden. Die Grundpunkte können zwei conjugirt imaginäre, zwei getrennte reelle oder zusammenfallende Punkte sein, je nachdem  $b^2 - 4ac < 0, > 0$  oder  $= 0$  ist. Im ersten Fall ist die Form  $f(x, y)$  eine definite, positive oder negative. Die Curve  $r^2 = 1$ , welche dem Einheitskreise der gewöhnlichen Geometrie entspricht, wird, in der gewöhnlichen Haassbestimmung betrachtet, eine Ellipse oder ein imaginärer Kegelschnitt, je nachdem  $f$  eine positive oder negative Form ist. Wir werden unsere Betrachtung auf den Fall der positiven Formen beschränken, weil die negativen leicht auf diese zurückgeführt werden können. Wir wollen daher sagen: im ersten Falle wird der Pseudokreis  $r^2 = 1$  eine Ellipse; dementsprechend nennen wir diesen den elliptischen Fall der Haassbestimmung. Im zweiten Falle wird die Curve  $r^2 = 1$  eine Hyperbel; dies nennen wir den hyperboli-

sehen Fall. Den dritten Fall werden wir als parabolischen bezeichnen. Die Curve  $r^2 = 1$  besteht hier aus den beiden geraden Linien

$$ax + \frac{by}{2} = \pm \sqrt{a}.$$

Damit haben wir den allgemeinen, man möchte sagen, souveränen Standpunkt der Cayley'schen Koassbestimmung bezeichnet. Das



Wesentliche ist, daß wir die Koassbestimmung nicht als etwas durch die Natur der Ebene von vornherein gegebenes ansehen, vielmehr durch freiwillige Festsetzung der Ebene auferlegen. Es wird unsere nächste Aufgabe sein, uns mit dem verschiedenen Charakter der dreierlei Fälle im Einzelnen vertraut zu machen.

### 1. Elliptischer Fall.

Die Entfernung eines Punktes  $x, y$  von dem Nullpunkte wurde bereits definiert durch die Gl.  $r^2 = f(x, y)$ . In entsprechender Weise werden wir für die Entfernung

(indem wir wieder  $t = 1$  setzen) den folgenden Ausdruck

$$r = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2}.$$

Drei Fälle sind dabei zu unterscheiden. Die Grundpunkte können zwei conjugirt imaginäre, zwei getrennte reelle oder zusammenfallende Punkte sein, je nachdem  $b^2 - 4ac < 0, > 0$  oder  $= 0$  ist. Im ersten Fall ist die Form  $f(x, y)$  eine definite, positive oder negative. Die Curve  $r^2 = 1$ , welche dem Einheitskreise der gewöhnlichen Geometrie entspricht, wird, in der gewöhnlichen Maaßbestimmung betrachtet, eine Ellipse oder ein imaginärer Kegelschnitt, je nachdem  $f$  eine positive oder negative Form ist. Wir werden unsere Betrachtung auf den Fall der positiven Formen beschränken, weil die negativen leicht auf diese zurückgeführt werden können. Wir wollen daher sagen: im ersten Falle wird der Pseudokreis  $r^2 = 1$  eine Ellipse; dementsprechend nennen wir diesen den elliptischen Fall der Maaßbestimmung.

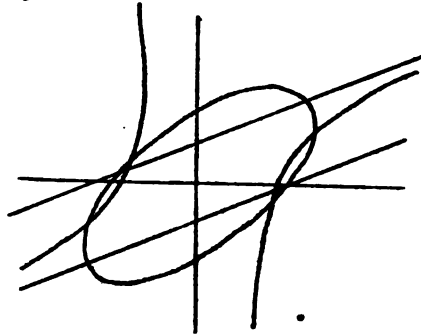
Im zweiten Falle wird die Curve  $r^2 = 1$  eine Hyperbel; dies nennen wir den hyperboli-



sehen Fall. Den dritten Fall werden wir als parabolischen bezeichnen. Die Curve  $r^2 = 1$  besteht hier aus den beiden geraden Linien

$$ax + \frac{by}{2} = \pm \sqrt{a}.$$

Damit haben wir den allgemeinen, man möchte sagen, souveränen Standpunkt der Cayley'schen Koassbestimmung bezeichnet. Das



Wesentliche ist, daß wir die Koassbestimmung nicht als etwas durch die Natur der Ebene von vornherein gegebenes ansehen, vielmehr durch freiwillige Festsetzung der Ebene auferlegen. Es wird unsere nächste Aufgabe sein, uns mit dem verschiedenen Charakter der dreierlei Fälle im Einzelnen vertraut zu machen.

### 1. Elliptischer Fall.

Die Entfernung eines Punktes  $x, y$  von dem Nullpunkte wurde bereits definiert durch die Gl.  $r^2 = f(x, y)$ . In entsprechender Weise werden wir für die Entfernung

irgend zweier Punkte  $x, y$  und  $x', y'$  den Ausdruck festsetzen:  $r^2 = f(x-x', y-y')$ . Das System der Curven  $r = \text{const.}$ , welches den concentrischen Kreisen in der gewöhnlichen Geometrie entspricht, besteht aus einem Systeme ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen.

Weiter haben wir den Begriff des Winkels in die Pseudogeometrie zu übertragen. In der gewöhnlichen Geometrie berechnet sich der Winkel zweier Strecken  $O(x, y)$  und  $O(x', y')$  folgendermassen:

$$\varphi = \arccos \frac{x x' + y y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} = \arcsin \frac{x y' - x' y}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

In unserer allgemeinen Maaßbestimmung müssen wir natürlich den Winkel so definieren, daß er in die vorstehende Grösse übergeht, falls wir die Grundpunkte der Maaßbestimmung durch affine Transformation, also homogene lineare Transformation der  $x$  und  $y$ , in die Kreispunkte rücken lassen. Dementsprechend setzen wir  $a x^2 + b x y + c y^2$  an die Stelle von  $x^2 + y^2$  und bilden statt  $x x' + y y'$ ,

welcher Ausdruck die Polare des Punktes  $x'y'$  in Bezug auf das Geradenpaar  $x^2 + y^2 = 0$  darstellt, die Polare  $axx' + b(x'y' + x'y) + cyy'$  in Bezug auf unser neues Geradenpaar  $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ . Somit definieren wir den Winkel der Strahlen  $O(x, y)$  und  $O(x', y')$  in der Pseudogeometrie folgendermassen:

$$\varphi = \arccos \frac{axx' + \frac{1}{2}(xy' + x'y) + cyy'}{\sqrt{ax^2 + bxy + cy^2} \sqrt{ax'^2 + bx'y' + cy'^2}}$$

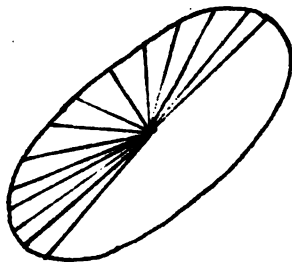
woraus sich noch als zweiter Ausdruck ergibt:

$$\varphi = \arcsin \frac{(xy' - x'y) \sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{ax^2 + bxy + cy^2} \sqrt{ax'^2 + bx'y' + cy'^2}}$$

Zur Veranschaulichung wollen wir zusehen, was die Gleichheit zweier Winkel bedeutet. Wir wollen uns vom Mittelpunkt der Einheitsellipse eine Anzahl von Geraden zeichnen, welche im Sinne der Pseudogeometrie je gleiche Winkel mit einander bilden, also geradezu eine Winkelscala konstruieren. Die entstehenden Ellipsenvektoren sind dann im Sinne der Pseudogeometrie congruent, d. h. sie können

durch Pseudobewegung, hier durch bloße  
Drehung, zur Deckung gebracht werden.

Im Sinne der ge-  
wöhnlichen Haass-  
bestimmung sind sie  
immer noch inhalt-  
gleich. Denn die  
Pseudodrehungen  
machen einen ge-  
wissen Teil der



affinen Transformationen aus; sie haben  
außerdem die Determinante 1, weil sie  
einen bestimmten Flächeninhalt, näm-  
lich die Fläche der Einheitsellipse, in  
sich überführen. In Folge dessen bleibt  
bei unseren Drehungen nach Obigem  
auch im Sinne der gewöhnlichen Haass-  
bestimmung der Flächeninhalt der Fi-  
guren invariant. Diese Bemerkung  
dient dem Auge als Anhalt, wenn  
wir, wie in der Figur, um eine Wän-  
kelscala entwerfen wollen.

Hieran könnten wir noch weitere Be-  
merkungen über die anderen Operatio-  
nen in der Gruppe unserer Pseudoge-

metrie, Ähnlichkeitstransformation und Spiegelung, anschliessen.

Diejenigen unter Ihnen, denen diese im Grunde sehr einfachen Begriffe ungewohnt sind, können sich dieselben vielleicht durch einen Vergleich mit der allgemeinen Flächentheorie näher bringen. Dort führt man bekanntlich als krummlinige Coordinaten eines Flächenpunktes irgend zwei Curvensysteme  $x$  und  $y$  ein und stellt das Linienelement, d. h. die Entfernung zweier benachbarter Punkte durch sie folgendermassen dar:

$$ds = \sqrt{E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2},$$

wo die  $E, F, G$  im Allgemeinen Functionen von  $x$  und  $y$  sein werden. Unsere Koord.-bestimmung in der Ebene nun, in welcher

$$ds = \sqrt{a dx^2 + b dx dy + c dy^2}$$

wird, erweist sich als ein spezieller Fall jener, indem nämlich bei uns  $E, F$  und  $G$  constante Grössen sind. In analytischer Hinsicht ordnet sich

unsere Haassbestimmung durchaus in die allgemeine Flächentheorie ein, nur die Auffassung ist in beiden Fällen eine verschiedene. In der Flächentheorie denken wir uns die Haassbestimmung der geometrischen Gestalt der Fläche entnommen; in unserem Falle dagegen tragen wir sie unsererseits durch einen Akt der Willkür in die Fläche herein. Das ist derselbe Gedanke, den wir, soweit die Ebene in Betracht kommt, schon oben berührten.

Eine bedeutende Vereinfachung erzielen wir dadurch, daß wir unsere quadratische Form  $f$  in zwei complexe Factoren spalten:

$$f(x, y) = \left( \sqrt{a}x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}y \right) \left( \sqrt{a}x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}y \right)$$

und diesen Factoren einen geometrischen Sinn beilegen. Jeder dieser Factoren, gleich Null gesetzt, stellt eine gerade Linie dar, welche durch den einen oder anderen Grundpunkt auf der unendlich fernen Geraden hindurchgeht. Wir bezeichnen sie nach dem Vorgange von Lie als Minimallinien. Den Minimallinien kommen

im Sinne unserer Moassbestimmung die paradoxesten Eigenschaften zu: sie haben beispielsweise die Länge Null und stehen auf sich selbst rechtwinklig, wie aus unseren obigen Definitionen von Entfernung und Winkel hervorgeht.

Dass diese Linien imaginär sind, soll uns nicht davon abhalten, mit ihnen geometrisch zu operieren. Wir werden dieselben sogar zu Axen eines Koordinaten-Systems, des „Minimalkoordinaten-Systems“ machen. Die Minimalkoordinaten  $\xi$  und  $\eta$  definieren wir als Parameter in den beiden Geradensystemen, welche der einen oder anderen Minimallinie parallel laufen, wir setzen einfach

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{a}x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}y \\ \eta &= \sqrt{a}x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}y \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{so dass} \\ \xi = \sqrt{\xi\eta} \\ \text{wird} \end{array}$$

Die Minimalkoordinaten sind gewöhnliche (nur imaginäre) Parallelkoordinaten. Einem reellen Punkte der Ebene  $x$  und  $y$  entsprechen 2 conjugirt

imaginäre Werte von  $\xi$  und  $\eta$ .

Die Minimallinien der gewöhnlichen Keassbestimmung sind die beiden Strahlen nach den Kreispunkten  $x + iy = 0$  und  $x - iy = 0$ . Die Minimalcoordinaten sind hier einfach so zu definieren

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x - iy \\ \eta &= x + iy \end{aligned} \right\}.$$

Überall da, wo man in der gewöhnlichen Geometrie der Ebene mit den complexen Aggregaten  $x + iy$  und  $x - iy$  rechnet, können wir demnach von Minimalcoordinaten reden. Der Nutzen der Minimalcoordinaten ist hiernach aus der Functionentheorie, aus der Mechanik etc. hinlänglich bekannt. Für unsere Zwecke liefern sie wesentliche Vereinfachungen. Wir stellen zunächst den Ausdruck für eine Drehung in Minimalcoordinaten her. Eine Drehung um  $O$  ist eine lineare Substitution in den  $x, y$ , also auch in den  $\xi, \eta$ . Nun bleiben bei der Drehung die Grundpunkte, also auch die Strahlen von  $O$  nach diesen, d. h. die Mi-



67.

nimmallinien ungeändert. Eine Drehung führt also  $\xi = 0$  in  $\xi' = 0$  über und  $\eta = 0$  in  $\eta' = 0$ . Daher nimmt der Ausdruck für eine Drehung folgende Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= m \xi \\ \eta' &= m' \eta \end{aligned} \right\}.$$

Berücksichtigen wir noch, daß die Determinante der Substitution gleich 1 und die Coefficienten conjugirt imaginär sein müssen, wenn anders die Drehung reelle Punkte in reelle überführen soll, so können wir die vorstehenden Gleichungen folgendermaßen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= e^{i\varphi} \xi \\ \eta' &= e^{-i\varphi} \eta \end{aligned} \right\}.$$

Die reelle Grösse  $\varphi$  bedeutet den Drehungswinkel im Sinne unserer Koax. Bestimmung. Aus den vorstehenden Gl. folgt nämlich durch Addition

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{\xi' \eta + \xi \eta'}{\xi \eta} \right)$$

oder auch, da  $\xi \eta = \xi' \eta' = r^2$ :

$$\cos \varphi = \frac{\frac{1}{2} (\xi' \eta + \xi \eta')}{\sqrt{\xi \eta} \sqrt{\xi' \eta'}}$$

was mit der Winkeldefinition von pag 61 übereinstimmt, weil  $\frac{\xi' \eta + \xi \eta'}{2}$  die Co-  
laxe von  $\xi \eta$  ist.

Viel eleganter aber können wir jetzt den  
Pseudowinkel im Anschluß an unsere  
Drehungssubstitution folgendermaßen  
definieren:

Der Winkel der beiden Strahlen von 0  
nach  $(\xi, \eta)$  und  $(\xi', \eta')$  ist gleich  $\frac{1}{2}$  mul-  
tiplicirt mit dem Logarithmus des  
Doppelverhältnisses, welches die genann-  
ten Strahlen mit den Minimallinien  
bilden. Aus unseren Substitutionsfor-  
meln folgt nämlich durch Division  
die Gleichung:

$$\varphi = \frac{1}{2} \lg \left( \frac{\xi'}{\eta'} : \frac{\xi}{\eta} \right),$$

welche die neue Winkeldefinition er-  
gibt. Dieselbe ist natürlich nur in der  
Form von der früheren verschieden,  
analytisch ist sie jener ganz gleich-  
wertig.

Do. 21. Nov. 95. Zum Schluß unserer Aus-

fürungen über die elliptische Haassbestimmung müssen wir bemerken, daß wir uns alle diese Einzelheiten hätten ersparen können. Wir hätten nämlich mit Zuhilfenahme projectiver Begriffe einfach folgendermassen sagen können. Wir erhalten die elliptische Haassbestimmung in einer Ebene, wenn wir eine mit gewöhnlicher Haassbestimmung ausgestattete Ebene durch Parallelprojection auf jene beziehen und die Haassverhältnisse aus der Originalebene auf die entsprechenden Punkte der Bildebene übertragen. Wir haben nur dafür zu sorgen, daß die Kreispunkte bei der Projection übergehen in die Grundpunkte der elliptischen Haassbestimmung. Dabei wird beispielsweise aus dem System concentrischer Kreise um  $O$  in der Originalebene das System ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen in der Bildebene worden; eine gewöhnliche Winkelskala congruenter Teile verwandelt sich in die elliptische

Winkelskala von pg. 62.

Die Sache liegt, kurz gesagt, so: Indem wir von einer elliptischen Moassbestimmung in der Bildebene sprechen, denken wir an die gewöhnliche Moassbestimmung in der Originalebene.

Für den Beweis dessen greifen wir auf unsere Formeln für Minimalkoordinaten zurück. Seien  $\xi, \eta$  die oben definierten Minimalkoordinaten der elliptischen Moassbestimmung,  $\Xi, H$  gewöhnliche Minimalkoordinaten in einer  $X, Y$ -Ebene, so dass

$$\Xi = X + iY, \quad H = X - iY$$

wird; dann führt die Substitution  $\Xi = \xi$ ,  $H = \eta$  die Grundpunkte der  $X, Y$ -Ebene in die Kreispunkte der  $\xi, \eta$ -Ebene über und die elliptische Moassbestimmung verwandelt sich in die gewöhnliche. Ausführlicher schreibt sich jene Substitution folgendermassen:

$$X \pm iY = \sqrt{a} X + \frac{b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{a}} Y$$

oder

$$X = \sqrt{a} X + \frac{bY}{2\sqrt{a}}$$

$$Y = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{a}} Y.$$

Es ist aber aus der projectiven Geometrie bekannt, daß diese die Gleichungen einer Parallelprojection der  $x, y$ - auf die  $xy$ -Ebene sind. Eine mit elliptischer Kaassbestimmung ausgestattete  $x, y$ -Ebene kann also durch Parallelprojection stets in eine  $x, y$ -Ebene mit gewöhnlicher Kaassbestimmung übergeführt werden.

2. Hyperbolischer Fall,  $b^2 = 4ac > 0$ .

Dieselbe Betrachtungsweise liesse sich auch auf den Fall der hyperbolischen Kaassbestimmung anwenden. Wir können die hyperbolische Ebene gleichfalls durch Parallelprojection in eine Ebene mit gewöhnlicher Kaassbestimmung verwandeln, wobei der Übergang durch dieselben Transformationsgleichungen wie vorkin vermittelt wird. Diese Gleichungen enthalten jetzt aber in ihren Coefficienten die Quadratwurzel aus einer negativen Grösse. Die Projection wird daher jetzt eine imaginäre. Da aber die Verhältnisse bei einer imaginären Projection nicht ohne Weiteres anschaulich sind,

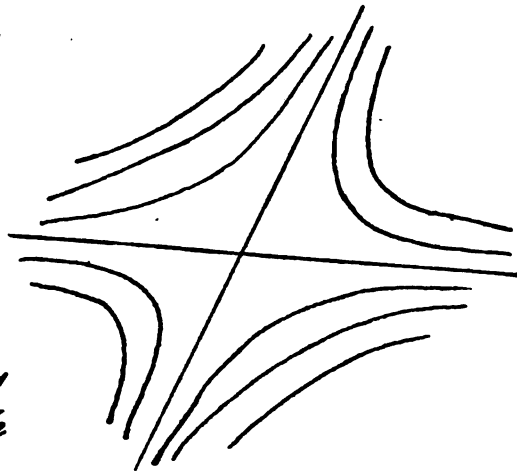
72.

missen wir die geometrische Bedeutung der hyperbolischen Waassbestimmung im Einzelnen durchgehen, und eben deshalb hatten wir als eine Vorübung das Gleiche vorher bei der elliptischen Waassbestimmung gethan.

Den Abstand eines Punktes  $x, y$  von  $O$  definiren wir nach wie vor durch den Ausdruck

$$r = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2} \quad r = \sqrt{\xi \cdot \eta}$$

Für die Punkte gleichen Abstandes besteht die Gleichung  $ax^2 + bxy + cy^2 = C^2$ .  
 In dem besondern Falle  $C = 0$  zerfällt die Curve gleichen Abstandes in 2 reelle gerade Linien  $\xi = 0, \eta = 0$ ; es sind dieses die



„Minimallinien der hyperbolischen Waassbestimmung“, deren sämtliche Punkte von  $O$  den Abstand Null besitzen. Die Minimallinien

zerlegen die Ebene in zwei Doppel-  
vectors. In dem einen Doppelvector  
haben  $\xi$  und  $\eta$  gleiches, in dem an-  
deren entgegengesetzten Vorzeichen.

Fals  $C$  von Null verschieden, so  
besteht die Curve gleichen Abstandes  
aus einer Hyperbel, welche die Mini-  
mallinien zu Asymptoten hat. Die  
selbe liegt in dem ersten oder zwei-  
ten Doppelvector, je nachdem  $C > 0$   
oder  $C < 0$  ist. Die Punkte des ersten  
Sector haben daher von  $O$  einen reel-  
len, die des zweiten einen imaginären  
Abstand.

Unter dem Winkel ( $\varphi$ ) zweier von  $O$   
auslaufender Strahlen verstehen wir  
hier wie im vorigen Falle den mit  
 $\frac{1}{2}$  multiplicirten Logarithmus derjeni-  
gen Doppelverhältnisses, welches jene  
Strahlen mit den Minimallinien bil-  
den. Hinsichtlich der Realität des  
Winkels müssen wir zwei Fälle un-  
terscheiden:

a. Beide Geraden liegen in demsel-  
ben Doppelsector. Dann besitzt das

74.

genannte Doppelverhältnis einen positiven Wert; wir haben daher, unter  $\varrho$  eine reelle Grösse verstanden:

$$\log W = \varrho \pm 2k\pi i$$

und

$$\varphi = \frac{i\varrho}{2} \mp k\pi.$$

Zwei Strahlen, welche demselben Sector angehören, bilden also mit einander, von Multiplis der Zahl  $\pi$  abgesehen, einen rein imaginären Winkel.

b. Beide Geraden liegen in verschiedenen Sektoren. Dann ist das Doppelverhältnis negativ; also

$$\log W = \varrho \pm (2k + i)\pi i$$

und

$$\varphi = \frac{i\varrho}{2} \mp (k + \frac{1}{2})\pi.$$

Zwei Strahlen, welche durch die Minimalgeraden getrennt werden, liefern also einen Winkel, dessen reeller Bestandteil ein ungerades Vielfaches von  $\frac{1}{2}\pi$  ist. Die Minimallinien selbst bilden mit jeder Geraden einen unendlich grossen Winkel. Lassen wir nämlich einen der vorher betrachteten Strahlen in eine



75.

der Minimallinien rücken, so wird das Doppelverhältnis 0 oder  $\infty$ . Der zugehörige Winkel ist also allemal unendlich gross.

Wollen wir, was später bequem sein wird, den imaginären Winkel  $\varrho$  durch eine reelle Grösse  $\varphi$  ausdrücken:  $\varrho = i\varphi$ , so müssen wir natürlich auch den  $\sin \varrho$  durch  $\sin i\varphi = \operatorname{sh}(\varphi)$  ersetzen. In den trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie sind also dann die trigonometrischen Functionen durch die sog. hyperbolischen zu ersetzen.

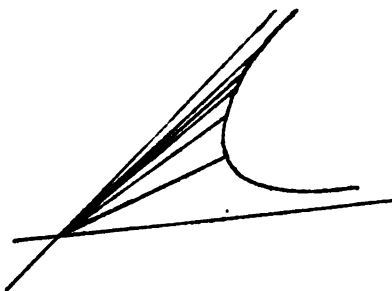
Durch die Minimalkoordinaten  $\xi$  und  $\eta$  drückt sich der Winkel wieder besonders einfach aus. Es wird nämlich

$$\varrho = \frac{1}{2} \lg \left( \frac{\xi}{\eta} = \frac{\eta'}{\xi'} \right)$$

Wollen wir nun auch eine hyperbolische Winkelskala construiren, so zeichnen wir uns zunächst die Einheitshyperbel  $x^2 = 1$ . Einen von 0 aus nach dieser verlaufenden

46.

Radiusvector dre-  
hen wir nun fortge-  
setzt um den glei-  
chen hyperbolisch  
gemessenen Winkel  
vorwärts, wobei  
der Endpunkt  
des Vectors auf  
der Hyperbel  
fortgleitet. Die von dem Vector be-  
schriebenen Flächen, welche im Sinne  
der hyperbolischen Massbestimmung  
congruent sind, bleiben im Sinne  
der gewöhnlichen Massbestimmung  
inhaltgleich. Danach ist die Figur  
der Winkelskala zu entwerfen.



Wenn wir solcher Weise den Radiusvec-  
tor fortgesetzt um den gleichen Betrag  
weiter drehen, bringen wir ihn einer  
der Minimallinien immer näher, ohne  
sie jedoch jemals zu erreichen. Dem  
der Flächeninhalt welcher von un-  
serm Radiusvector, der Einheitshy-  
perbel und der Minimallinie ein-  
geschlossen wird, ist unendlichgrau.

Bei einer endlichen Anzahl endlicher Drehungen überstreichen wir aber mit unserem Radius, Testor nur eine endliche Fläche. Wir gelangen also, so oft wir auch drehen mögen, niemals bis in die Minimallinie hinein. Daraufhin verstehen wir auch, warum die Minimallinie mit jeder Geraden einen unendlich grossen Winkel bilden muss.

Der analytische Ausdruck für eine Drehung um  $O$  ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung für den Winkel zweier von  $O$  auslaufender Geraden. Danach besteht zwischen einem Punkte  $\xi', \eta'$  der um  $\varphi$  gedrehten Geraden und einem Punkte  $\xi, \eta$  der Geraden vor der Drehung die Relation:

$$\frac{\xi'}{\eta'} = e^{i\varphi} \frac{\xi}{\eta}.$$

Soalten wir diese Gleichung so, dass  $\xi, \eta = \xi', \eta'$  wird, so erhalten wir die Coordinaten  $\xi', \eta'$  desjenigen Punktes, in den der Punkt  $\xi, \eta$  durch die Drehung übergeführt wird, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \zeta' &= e^{i\varphi} \zeta \\ \eta' &= e^{-i\varphi} \eta \end{aligned} \right\} \text{78.}$$

Hier ist  $e^{i\varphi}$  eine reelle Grösse. Wir schreiben daher lieber folgendermassen:

$$\left. \begin{aligned} \zeta'' &= e^{-2\varphi} \zeta = \rho \eta \\ \eta' &= e^{+2\varphi} \zeta = \frac{1}{\rho} \eta \end{aligned} \right\}$$

Dieses sind die Gleichungen der Drehungs-substitution. Sie zeigen, dass die Drehung in der hyperbolischen Geometrie eine aperiodische, nicht wie in der gewöhnlichen oder elliptischen Geometrie eine periodische Operation ist.

Neben der Drehung betrachten wir die Operation der Spiegelung. Eine Spiegelung definieren wir als eine Drehung, verbunden mit einer Vertauschung von  $\zeta$  und  $\eta$ . Die Transformationsgleichungen der Spiegelung werden also

$$\left. \begin{aligned} \zeta' &= \rho \eta \\ \eta' &= \frac{1}{\rho} \zeta \end{aligned} \right\}$$

Bei dieser Operation gibt es zwei gerade

79.

Linien, welche ungeändert bleiben,  
nämlich die Linien

$$\frac{\xi}{\eta} = +\varrho \quad \text{und} \quad \frac{\xi}{\eta} = -\varrho.$$

Die erste dieser Linien geht bei der Spiegelung Punkt für Punkt in sich über. Wir haben nämlich unter  $m$  einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$\xi = m\varrho \quad \text{und daher} \quad \xi' = m\varrho = \xi \\ \eta = m \quad \text{und daher} \quad \eta' = \varrho = \eta$$

Die zweite Linie geht in der Weise in sich über, daß der Punkt  $\xi, \eta$  mit dem Punkte  $-\xi, -\eta$  vertauscht wird. In den Minimalgeraden liegen diese beiden Linien harmonisch. Man überzeugt sich leicht, daß der so definierten Operation in der gewöhnlichen Geometrie die gewöhnliche Spiegelung, daß der ersten Linie die Spiegelungsaxe, der zweiten die dazu Senkrechte entspricht.

### 3. Parabolischer Fall. $b^2 - 4ac = 0$ .

Im parabolischen Falle wird die Form  $ax^2 + bxy + cy^2$  ein vollständiges Quadrat. Der Ausdruck für die Entfer-

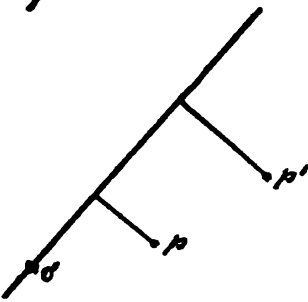
nung wird daher hier linear in  $x$  und  $y$

$$r = \pm (Ax + By) = \xi.$$

Die Minimallinien bestehen aus der doppelt zu zählenden Geraden  $Ax + By = 0$ .

Die Entfernung eines Punktes  $p$  von  $o$  wird gleich seiner Entfernung  $\xi$  von der Minimallinie.

Die Entfernung zweier Punkte  $p$  und  $p'$  von einander ist gleich  $\xi - \xi'$ . Nehmen wir noch beliebige andere Punkte



ke  $p_1, \dots, p_2$  ein, so wird jetzt die Entfernung  $p$  von  $p'$  gleich der Entfernung von  $p_1 + \dots +$  der Entfernung  $p_2$  von  $p'$ , da

$$\xi - \xi' = \xi - \xi_1 + \xi_2 - \dots + \xi_2 + \xi_2 - \xi'.$$

Wir kommen also zu dem paradoxen Resultat, dass die Weglänge zwischen 2 Punkten in der parabolischen Raumbestimmung unabhängig wird von dem zurückgelegten Wege und nur von der Lage des Anfangs- und Endpunktes abhängt. (Das Todelement da erscheint als ein vollständiges Differential).

Wollen wir den Winkel zweier in O zusammenlaufenden Geraden berechnen, so müssen wir die zusammenfallenden Minimallinien des parabolischen Falles als Grenzfall zweier nicht zusammenfallender Linien auffassen. Seien daher die Minimallinien zunächst

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \eta = \xi + \varepsilon \zeta = 0.$$

Den Winkel definieren wir dann wie früher durch:

$$\frac{1}{2} \lg \left( \frac{\xi}{\xi + \varepsilon \zeta} \cdot \frac{\xi' + \varepsilon \zeta'}{\xi'} \right),$$

wo nun  $\varepsilon$  eine zu Null abnehmende Grösse bedeutet. Wollen wir zu einer vernünftigen Winkeldefinition kommen, so müssen wir eine mit  $\varepsilon$  variable Massseinheit einführen. Wir schreiben daher:

$$C \left\{ \lg \left( 1 + \varepsilon \frac{\xi'}{\xi} \right) - \lg \left( 1 + \varepsilon \frac{\zeta}{\xi} \right) \right\} = C \varepsilon \left( \frac{\xi'}{\xi} - \frac{\zeta}{\xi} \right) + \dots$$

und setzen fest, dass  $C\varepsilon$  gleich einer festen Grösse  $k$  sei. Unter dem Winkel verstehen wir daher hier die Grösse

$$k \left( \frac{\xi'}{\xi} - \frac{\zeta}{\xi} \right),$$

in welcher  $\xi$  und  $\eta$  den Abstand von der Minimallinie  $\xi = 0$  und von einer Hilfsgeraden  $\eta = 0$  bedeutet. Der Winkel wird jetzt eine algebraische Funktion der Coordinaten, während er früher eine transcendente war. —

Freitag d. 22. XI. Wir kehren nunmehr zur Zahlentheorie zurück und machen uns zunächst in arithmetischer Formulierung mit dem fundamentalen Problem aus der Theorie der binären quadratischen Formen, mit dem wir uns hier in erster Linie ausführlich beschäftigen müssen, dem „Äquivalenzproblem“ bekannt. Es handelt sich um Folgendes: Gegeben seien zwei Formen

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

$$f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2,$$

in welchen wir unter  $x, y, \dots$  ganze Zahlen verstehen wollen, während wir die Coefficienten  $a, b, c, \dots$  nicht ausschließlich als ganzzahlig vorzusetzen werden. Können diese Formen durch eine Substitution:



$$x'' = \alpha x' + \beta y'$$

$$y'' = \gamma x' + \delta y'$$

mit reellen ganzzahligen Coefficien-  
ten von der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

in einander übergeführt werden? Wenn  
dieses der Fall ist, nennen wir die Formen  
f und f' äquivalent u. zw. eigent-  
lich oder uneigentlich äquivalent,  
je nachdem die Determinante der  
Substitution +1 oder -1 ist.

Eine Vorbedingung für die Äquiva-  
lenz beider Formen leiten wir aus der  
Betrachtung der Ausdrücke  $b^2 - 4ac$   
bez.  $b'^2 - 4a'c'$  her. Ihr Vorzeichen ent-  
scheidet bekanntlich über die Realität  
der Wurzeln von  $f=0$  bez.  $f'=0$ ; sie  
werden daher als Discriminanten  
bezeichnet. Nun ändert aber un-  
sere reelle Substitution ( $\alpha, \beta$ ) an  
der Realität der Wurzeln nichts.  
Sollen daher die Formen  $f$  und  $f'$  bei  
der Substitution identisch wer-  
den, so müssen sie von vornherein  
rein in dem Vorzeichen ihrer

Discriminanten übereinstimmen. Bei  
de Formen gehören daher, falls sie aequi-  
valent sind, gleichzeitig zu dem ellipti-  
schen parabolischen oder hyperbolischen  
Falle.

Die Invariantentheorie belehrt uns  
 darüber hinaus, dass die Discrimi-  
 nante einer Form eine invariante  
 Bildung ist, dass sie sich also bei  
 einer linearen Substitution nur um  
 eine Potenz der Substitutionsdeter-  
 minante ändert. Verstehen wir  
 unter  $A, B, C$  die Coefficienten  
 der transformirten Form, so wird  
 nämlich

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

In unserem Falle ( $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ) bleibt  
also die Discriminante völlig un-  
geändert.

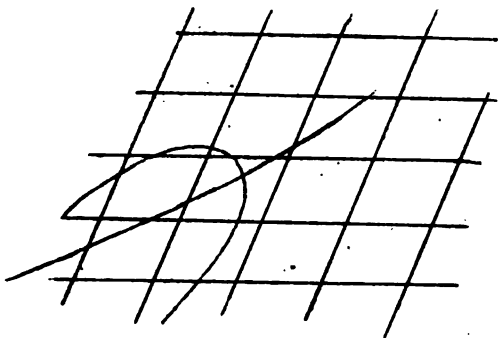
Die Gleichheit der Discriminanten von  
 $f$  und  $f'$ ,  $b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c' = D'$   
 ist daher jedenfalls eine notwen-  
 dige Bedingung für ihre Aequivalenz.

Damit ist aber die Frage noch lange  
 nicht entschieden. Der Inhalt der fol-

genden Theorie ist es gerade, die feineren Kriterien anzugeben, welche ausserdem für die Äquivalenz erforderlich sind. Wir übertragen die Frage sogleich in's Geometrische.

Wir ziehen uns zur Vereinfachung der Form  $f$  ein Gitter und betrachten dieses im Sinne der durch  $f(x, y)$  indicirten Maassbestimmung. Um letzteres

anzudeuten, zeichnen wir in das Gitter unsern Einheitskegelschnitt hinein, welcher nach Umständen eine Ellipse, Hyperbel oder ein Liniennpaar sein kann. Das Gitter repräsentirt uns



gewissermassen den variablen Bestandtheil unserer Form  $f$ , nämlich die Paare ganzer Trakten  $x$  und  $y$ , der Kegelschnitt den festen Bestandtheil, nämlich die Coefficienten  $a, b, c$ . Von dem Gitter kommen bei der sogleich zu nennenden affinen

Transformation nur die Gitterpunkte, nicht die Gitterstäbe in Betracht. Wir meinen im Folgenden daher nicht ein Parallel - sondern nur, ein Punktgitter.

Ein zweites gleichfalls mit einem Kegelschnitt versehenes Gitter stellt unsere zweite Form  $f'$  dar. Die Frage ist nun einfach: Sind die beiden so entstehenden Figuren affin verwandt, d. h. kann durch dieselbe affine Transformation erreicht werden, daß die Gitter und gleichzeitig die Kegelschnitte beider Figuren zur Deckung kommen.

Von vornherein ist klar, daß jedes Gitter in jedes andere und ebenso, daß jeder Kegelschnitt in jeden anderen durch affine Transformation verwandelt werden kann. Indem wir das eine oder andere an unseren Figuren vorweg thun oder nicht thun, können wir unsere Frage geometrisch in 3 verschiedene Formulierungen bringen.

I. Gegeben 2 Gitter und 2 Kegelschnitte

te. Gibt es eine affine Transformation, welche Gitter in Gitter und gleichzeitig Kegelschnitt in Kegelschnitt überführt?

II. Gegeben ein Gitter und 2 Kegelschnitte. Gesucht eine affine Transformation, welche das Gitter ungeändert lässt und den einen Kegelschnitt in den anderen überführt.

III. Gegeben 2 Gitter und ein Kegelschnitt. Es handelt sich darum durch eine affine Transformation, welche den Kegelschnitt (und natürlich seinen Mittelpunkt  $O$ ) ungeändert lässt, das eine Gitter in das andere zu verwandeln. Eine solche Transformation ist aber im Sinne der durch den Kegelschnitt repräsentierten Abmessbestimmung eine Bewegung; sie ist genauer gesagt, eine Drehung, wenn sie die Determinante  $+1$ , eine Spiegelung, wenn sie die Determinante  $-1$  hat. Im Falle der Äquivalenz müssen also unsere 2 Gitter bei dieser Art

der Fragestellung im Sinne der betr. Raumbestimmung congruent sein, u. zw. entweder *direct* oder *spiegelbildlich* congruent. Wir sehen uns also eigenthümlicher Weise hier in der Zahlentheorie vor dieselbe Frage geführt, mit welcher die elementare Geometrie anhebt, nämlich vor diese: wann sind zwei Figuren congruent?

Die verschiedenen Richtungen, in denen wir das vorliegende Problem unter I, II und III in Ansatz bringen, entsprechen genau den allgemeinen Formulierungen in §. 1, 2 meines Erlanger Programms. Es war mir damals nur nicht bekannt, daß eben jene Ideen auch in der Zahlentheorie fruchtbar sein könnten. Wenn man von der üblichen, algebraischen Geometrie ausgeht, so kommt man leicht dazu, als einziges Object der geometrischen Untersuchung die *continuirlichen* Curven anzusehen oder doch nur solche Gebilde, welche aus einer endlichen Zahl *discreter* Bestandtheile

bestehen. Ein ebenso interessantes Forschungsgebiet für den Geometer bilden aber ersichtlich auch Gebilde aus unendlich vielen disjunkten Bestandteilen wie unser Punktgitter. Sobald man nur diese mit berücksichtigt, erlangen die Begriffsbildungen der Geometrie sofort auch in der Arithmetik ihre Bedeutung, es verschwindet überhaupt der spezifische Gegensatz zwischen beiden Gebieten.

Da die III. Formulierung des Äquivalenzproblems eine besonders anschauliche war, werden wir im Folgenden diese vor dem anderen bevorzugen. Wir wollen zusehen, wie in diesem Falle die Elementarfigur des Koordinatensystems gestaltet ist, wie wir also den Einheitsvektor der  $x$  und  $y$ -Achse zu wählen haben, damit der gerade hingezichnete Kegelschnitt die Gleichung

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 = 1.$$

90.  
bekommt, Dem Punkte  $x=1, y=0$  ent-  
spricht als Entfernung von 0.

$$r = \sqrt{a},$$

dem Punkte  $x=0, y=1$  ebenso:

$$r = \sqrt{c};$$

der Winkel der beiden Einheitsvecto-  
ren ferner wird nach pg. 61. gegeben  
durch

$$\cos \varphi = \frac{b}{2\sqrt{ac}}.$$

Alle 3 Grössen sind natürlich im  
Sinne der durch den hingedruck-  
ten Kegelschnitt gegebenen Haass-  
bestimmung zu verstehen; durch  
Angabe dieser 3 Grössen ist das Gitter  
bis auf das willkürlich zu wäh-  
lende Azimuth des  $x$ -Vectors festgelegt.

Der Inhalt des Elementarparalle-  
logramms berechnet sich in unserer  
Haassbestimmung ebenso wie in  
der gewöhnlichen durch die Formel:

$$\sqrt{ac} \sin \varphi = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \frac{\sqrt{-D}}{2}$$

Sollen unsere beiden zu  $f$  und  $f'$  ge-  
hörigen Gitter im Sinne des Ansatzes



III durch Bewegung zur Deckung ge-  
bracht werden können, so müssen sie  
von vornherein jedenfalls flächen-  
gleiche Elementarparallelogramme  
haben; dem ihr Inhalt bleibt bei der  
Bewegung und andererseits bei belie-  
big geänderter Auswahl des elemen-  
tarparallelogramms un geändert.  
Die Gleichheit von  $D$ , welche wir bereits  
oben auf Grund der Invariantenna-  
tur der Discriminante constatirten, er-  
weist sich hiernach auch geometrisch  
als eine notwendige Vorbedingung für  
die Möglichkeit der „Äquivalenz“.

Specielle und in der Litteratur vorkom-  
mende Fälle unserer Kegelschnitt-Gitter-  
Figur sind diese:

Im elliptischen Falle, wir legen statt  
der Ellipse einen Kreis zu Grunde;  
dann bedeuten  $V_a$ ,  $V_c$  und  $\frac{b}{2a}$  Seiten-  
längen und Winkelgrößen der Ele-  
mentarfigur in gewöhnlicher Maass-  
bestimmung. Lassen wir dann noch  
den Kreis als etwas Selbstverständ-  
liches weg, indem wir momentan von

der Möglichkeit einer Pseudomaassbestimmung abschen, so erhalten wir diejenige Gitterfigur, welche bereits bei Gauss 1839 in seiner Besprechung eines Buches von Lieber (Vergl. Werke Bd. II) vorkommt und welche den Ausgangspunkt für alle späteren arithmetisch-geometrischen Untersuchungen bildet.

Im hyperbolischen Falle; wir mögen hieretwa die Einheits-Hyperbel als gleichseitig annehmen. Die so entstehende Figur: gleichseitige Hyperbel mit ein-gezeichnetem Gitter: findet sich bei Selling (Vergl. Crelle Bd. 74, 1874), allerdings in wesentlich anderer Gedankerverbindung.

Freit. d. 29. II. Wir haben nun das Äquivalenzproblem im elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Falle zu studiren, wo die Verhältnisse jedesmal sehr verschiedenen liegen. Allen drei Fällen gemeinsam ist nur dieses, daß sich die Untersuchung wesentlich auf die Umrißpolygone, oder, wie man es gewöhnlich arithmetisch ausdrückt, auf die

Kettenbruchentwicklung stützt. Da der parabolische Fall meistens vernachlässigt wird, wollen wir gerade mit diesem beginnen und nachher auf den hyperbolischen und elliptischen Fall kommen, (indem wir also auch hier die gewöhnliche Reihenfolge umkehren).

## 2. Das Äquivalenzproblem im parabolischen Falle.

Die parabolische Entfernung war

$$r = \sqrt{f} = Ax + By.$$

Bei der Construction der (zusammenfallenden) Fundamentalstrahlen

$$Ax + By = 0$$

ergibt sich eine wesentliche Fallunterscheidung, je nachdem A und B commensurabel oder incommensurabel sind. Im ersten Falle gibt es auf der Fundamentallinie unendlich viele im zweiten Falle gar keine Litterpunkte (außer 0).

Die Frage nach der Äquivalenz zweier Formen wird nun allemal so beantwortet, daß man die gegebenen Formen in eine gewisse, eindeutig definierte Normalform bringt oder wie man

es in der Zahlentheorie seit Lagrange ausdriickt, dass man zu den gegebenen Formen reducirte Formen construirt. Je nachdem diese übereinstimmen oder nicht, sind die gegebenen Formen äquivalent oder nicht. Diese Methode ist Ihnen von der Geometrie her durchaus geläufig. Wenn sie z. B. entscheiden wollen, ob zwei analytisch gegebene Kegelschnitte geometrisch identisch sind, können Sie doch so verfahren, dass Sie beide Kegelschnitte etwa auf die Hauptachsen transformiren. Sind die transformirten Gleichungen identisch, so waren es die Kegelschnitte auch vor der Transformation; sind sie verschieden, so sind auch die Kegelschnitte gewiss verschieden.

1<sup>ter</sup> Fall. Wenn  $A$  und  $B$  commensurabel sind, so ist die Herstellung einer Normalform sehr leicht. Wir können dann nämlich den Ausdruck für  $r$  folgendermassen schreiben:

$$r = m(\alpha x + \beta y),$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  teilerfremde ganze Zahlen,

$m$  eine geeignete rationale Zahl ist.  
 Zu den Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  wissen wir  
 zwei andere Zahlen  $\gamma$  und  $\delta$  zu  
 finden von der Beschaffenheit, dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

wird. Machen wir nun die affine  
 Transformation

$$X = \alpha x + \beta y, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

$$y = \gamma x + \delta y,$$

so ergibt sich als reducirte Form  
 die folgende:

$$r = m X.$$

Sei ferner eine zweite parabolische  
 Form  $f'$  gegeben, für welche

$$r' = \sqrt{f'} = A'x' + B'y'$$

Durch eine neue Transformation  $(\begin{smallmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{smallmatrix})$   
 bringen wir auch  $r'$  in die Form

$$r' = m' X'.$$

Das Resultat dieser Betrachtung ist  
 folgendes:

Zwei parabolische Formen  $f$  und  $f'$   
sind dann und nur dann äquiva-  
lent, wenn ihre Multiplikatoren  $m$   
und  $m'$  übereinstimmen.

Die Kettenbrüche (Umrisspolygone)

kamen hierbei nur insofern zur Geltung, als wir mit der diophantischen Gleichung  $\alpha x - \beta y = 1$  zu thun hatten.

2<sup>ter</sup> Fall. Wenn  $A$  und  $B$  incommensurabel sind, so schreiben wir den Ausdruck für  $x$  folgendermassen:

$$x = A(x - w y),$$

wo  $w = \frac{B}{A}$  eine irrationale Zahl ist.

Eine zweite Linearform sei

$$x' = A'(x' - w' y').$$

Sollen  $x$  und  $x'$  äquivalent sein, so müssen jedenfalls auch die zugehörigen Werte von  $w$  und  $w'$  untereinander durch eine lineare Transformation  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  zusammen hängen, auch diese müssen, wie wir kurz sagen, äquivalent sein.

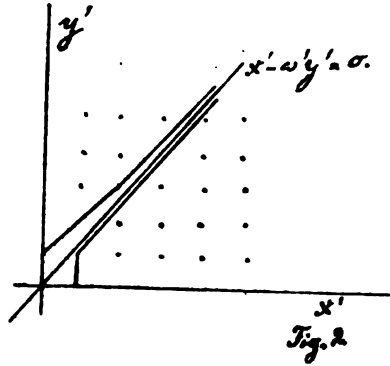
Eine notwendige Bedingung für die Äquivalenz beider Formen ist daher die Gleichung:

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}, \quad \alpha \delta - \beta \gamma = \pm 1$$

Im vorhergehenden Falle commensurabler  $A, B$  ist dieser Ansatz von Hause aus möglich und eben darum gar nicht zur Sprache gekommen.

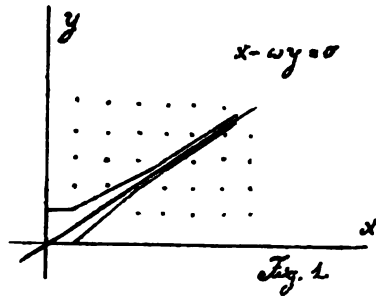
97.

Um zu entscheiden, ob diese Bedingung erfüllt ist, markieren wir uns in der  $x, y$  Ebene sowohl wie in der  $x', y'$  Ebene die Litter der ganzzahligen Punkte und legen durch sie die beiden  $w$ -Linien hindurch



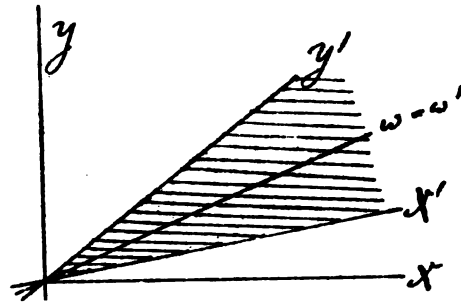
$$x - wy = 0 \text{ und } x' - w'y' = 0$$

Die Frage ist nun: können diese beiden Figuren durch Parallelprojektion zur Deckung gebracht werden? Da,



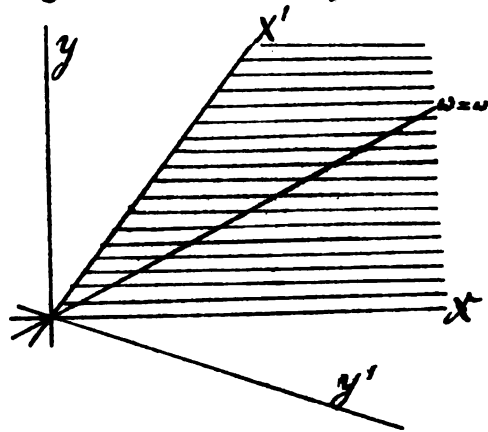
bei kommt es lediglich darauf an, die Punktgitter und die  $w$ -Linien ineinander überzuführen, die Coordinatenachsen, welche nichts mit der Äquivalenzfrage zu thun haben, dürfen auch nach der Transformation verschieden sein.

Nehmen wir an, es sei uns diese Überführung gelungen.  
Dann entsteht eine „Doppelfigur“ mit vereinigt gelegenen  $w$ -Linien und Punktgittern, bei welcher wir noch



4 verschiedene Möglichkeiten unterscheiden können, je nachdem die positive  $x'$ -Achse oder die positive  $y'$ -Achse in das Innere des ersten Quadranten der  $x, y$ -Ebene zu liegen kommt, oder nicht.

Gleichviel welcher von diesen Fällen vorliegen möge, so giebt es jedenfalls ein Gebiet, welches gleichzeitig dem positiven  $x, y$ -Quadranten und dem positiven  $x', y'$ -Quadranten angehört. In der ersten Figur ist es bei spielerweise der von der  $x'$ - und  $y'$ -Achse, in der zweiten





der von der  $x^1$ - und  $x^2$ -Achse eingeschlossene schraffierte Sector.

Nun construiren wir im ersten Quadranten der  $x, y$ -Ebene und im ersten Quadranten der  $x', y'$ -Ebene die Umrisspolygone (vergl. die Figuren der Seite 97), welche die  $w$ -Linie und die  $w'$ -Linie umgeben. Dieselben sind, wie wir wissen, durch die Lage dieser Linien im Punktgitter völlig bestimmt. In unserer Doppelfigur, wo die  $w$ -Linien und die Punktgitter zusammenfallen, werden daher auch die Umrisspolygone identisch, soweit sie im schraffirten Gebiete liegen.

Diese Thatsache haben wir jetzt in's Arithmetische zu übersetzen, indem wir an die zu den Umrisspolygone gehörigen Kettenbruchentwicklungen denken. Die Teilnenner  $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_2, u_4, u_6, \dots)$  des Kettenbruchs haben in der Figur des Umrisspolygons ihre bestimmte Bedeutung. Wenn also, wie wir sahen, die Umrisspolygone von  $w$  und  $w'$

von einer gewissen Stelle ab zusammenfallen, so müssen auch die Teilnenner in den beidseitigen Kettenbruchentwickelungen von einer gewissen Stelle ab ihrer Größe und ihrer Aufeinanderfolge nach übereinstimmen. Wir kommen daher zum folgenden Resultat:

Sollen zwei irrationale Größen  $\omega$  und  $\omega'$  äquivalent sein, so ist dazu jedenfalls erforderlich, dass ihre Kettenbrüche von einer bestimmten Stelle ab identisch werden.

Man erkennt aber auch leicht, dass diese Bedingung hinreichend ist. Es seien nämlich die Kettenbruchentwickelungen

$$\omega = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \dots + \frac{1}{\mu_r + \frac{1}{\mu}}}, \quad \omega' = \mu'_1 + \frac{1}{\mu'_2 + \dots + \frac{1}{\mu'_r + \frac{1}{\mu}}}$$

dann haben wir, wie früher (pag 10), die Bezeichnung:

$$\omega = \frac{p_r \mu + p_{r-1}}{q_r \mu + q_{r-1}}, \quad p_r q_{r-1} - q_r p_{r-1} = (-1)^r$$

Diese Gleichung besagt, dass  $\omega$  und  $\mu$

äquivalent sind. Ebenso sind auch  $w$  und  $N'$  äquivalent. Setzen wir nun voraus, daß die Kettenbrüche von einer gewissen Grenze ab übereinstimmen, dann etwa  $N = N'$  wird, so folgt daraus sofort, daß  $w$  und  $w'$  unter einander äquivalent sind. Die Determinante der affinen Substitution  $w = S(w')$  ist dabei gleich dem Producte aus den Determinanten der Substitutionen  $w = S_1(N)$  und  $w' = S_2(N')$ ; sie ist also gleich  $(-1)^{r+r'}$ . Danach sind  $w$  und  $w'$  eigentlich äquivalent, wenn  $r$  und  $r'$  gleichzeitig gerade oder ungerade sind; sie sind uneigentlich äquivalent, wenn eine der Zahlen  $r$  und  $r'$  gerade, die andere ungerade ist. Ersteres findet in Figur 1 von pg. 98. statt. Wenn hier nämlich der erste Eckpunkt der Polygone, welcher in das schraffierte Gebiet fällt, rechts von  $w$  liegt, so sind  $r$  und  $r'$  beide gerade; wenn er links von  $w$  fällt, so sind  $r$  und  $r'$  beide ungerade.

Letzteres findet in Figur 2 statt. Denn hier gehört zu dem ersten Eckpunkt, welcher in das schraffierte Gebiet fällt, ein gerades  $r$  und ein ungerades  $r'$  oder ein ungerades  $r$  und ein gerades  $r'$ . Allgemein werden  $w$  und  $w'$  eigentlich oder uneigentlich äquivalent werden, je nachdem der Sinn, in dem die Geraden  $x, w, y$  und die Geraden  $x', w', y'$  auf einander folgen, der gleiche oder der entgegengesetzte ist.

Wir haben schließlich anzugeben, welche weitere Bedingung zu der Äquivalenz der Zahlen  $w$  und  $w'$  hinzukommen muss, damit auch die Linearformen  $r$  und  $r'$  äquivalent werden. Durch Umkehrung der Substitution  $w = S(r)$  von pg. 101 ergibt sich

$$r = \frac{-w q_{r-1} - p_{r-1}}{w q_r - p_r}$$

oder wegen der ursprünglichen Bedeutung von  $w$

$$r = - \frac{A p_{r-1} + B q_{r-1}}{A p_r + B q_r}$$

Ebenso wird

$$N' = \frac{A'p'_{r'-1} + B'q'_{r'-1}}{A'p'_{r'} + B'q'_{r'}}$$

Ist nun  $N = N'$ , so können wir zunächst nur schliessen

$$\frac{Ap_{r-1} + Bq_{r-1}}{Ap_r + Bq_r} = \frac{A'p'_{r'-1} + B'q'_{r'-1}}{A'p'_{r'} + B'q'_{r'}}$$

Die Nenner dieses Ausdruckes bedeutend die Werte der Linearformen  $r$  und  $r'$  im Punkte  $(r)$ . Sollen die Formen äquivalent sein, so müssen diese Werte übereinstimmen. Stimmen aber die Nenner (oder die Zähler) jenes Ausdruckes überein, so folgt auch für alle folgenden Näherungspunkte die Gleichheit von  $r$  und  $r'$ .

Wir erkennen daraus: Sind  $w$  und  $w'$  äquivalent, so sind es auch die Linearformen  $r$  und  $r'$ , vorausgesetzt, daß sie in einem der zugehörigen gemeinsamen Näherungspunkte denselben Wert haben.

### 3. Das Äquivalenzproblem im hyperbolischen Falle.

Wir betrachten eine Form vom hyper-

bolischen Typus

$$f = ax^2 + bxy + cy^2, \text{ wo } b^2 - 4ac > 0.$$

Die Coefficienten  $a, b, c$  lassen wir zunächst beliebig, wir werden dann später um so besser verstehen, welche besonderen Verhältnisse im ganzzahligen Falle statt haben.

Die Wurzeln der Gleichung  $f = 0$  liefern uns die Fundamentalstrahlen  $x/y = \omega_1$  und  $x/y = \omega_2$ . Von den drei Fällen, welche hier zu unterscheiden wären: beide Strahlen  $\omega_1, \omega_2$  rational, - eine Zahl rational, die andere irrational, - beide Zahlen irrational, wollen wir nur den letzten berücksichtigen. Übrigens scheidet, wenn die Coefficienten ganzzahlig sind, der zweite Fall von selbst aus, während sich der dritte Fall dahin specialisirt, daß die beiden irrationalen Zahlen conjugirte Irrationalitäten werden.

Eine zweite Form sei:

$$f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2;$$

dieselbe liefert gleich Null gesetzt die beiden Wurzeln  $\omega'_1$  und  $\omega'_2$ .

Wir construiren uns in der  $x, y$ - und in der  $x', y'$ -Ebene die Linien  $w_1, w_2$  und  $w'_1, w'_2$  und markiren ausserdem die Punktgitter. Sollen die so entstehenden Figuren affin verwandt sein, so müssen ausser den Punktgittern auch die  $w$ -Geraden paarweise in einander übergehen. Es müssen also Gleichungen der folgenden Art bestehen:

$$w_1 = \frac{\alpha w'_1 + \beta}{\gamma w'_1 + \delta}$$

$$w_2 = \frac{\alpha w'_2 + \beta}{\gamma w'_2 + \delta}$$

Eine solche Gleichung zwischen zwei Grössen  $w$  besteht, wie wir im vorigen Falle sahen, dann, wenn die Kettenbruchentwicklungen von einer gewissen Stelle ab übereinstimmen. Vorausgesetzt, dass dieses bei den Paaren  $w_1, w'_1$  und  $w_2, w'_2$  einzeln statt hat, so können die Substitutionen  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , durch welche die beiden  $w$  zusammenhängen, noch verschieden ausfallen. Für die vorliegende Frage aber müssen wir, den letztgenannten Gleichungen ent-

sprechend, verlangen, daß die beiden  $w$ -Linien nebst den Punktgittern durch ein und dieselbe affine Transformation in einander übergehen. Wir sind daher auf ein neues Hilfsmittel angewiesen, das uns die Kettenbrücheentwickelungen von  $w_1$  und  $w_2$  / bez. von  $w'_1$  und  $w'_2$  / in Verbindung setzt.

Da bemerken wir, daß die Abgrenzung des Punkthaufens im parabolischen Falle durch die  $w$ -Linie einerseits und durch eine Koordinatenaxe andererseits nur eine künstliche war, welche nicht aus dem Wesen unserer Figuren hervorging. Im hyperbolischen Falle, wo wir zwei  $w$ -Linien haben, liefern uns dieselben selbst eine natürliche Begrenzung. Wir werden unsere Umrisspolygone daher jetzt ohne Rücksicht auf die Koordinatenachsen construiren können und einfach alle diejenigen Gitterpunkte durch ein Umrisspolygon eingrenzen, welche einem der vier durch die  $w$ -Linien gebildeten Quadranten angehören. So bekommen wir vier natürliche Umrisspolygone, welche sich beidseitig ins Un-



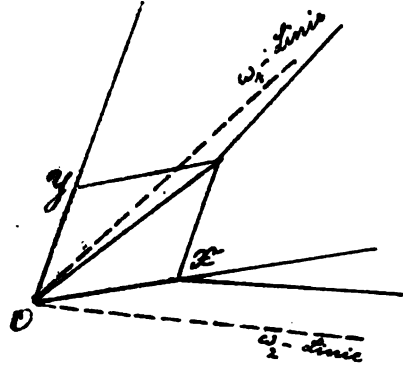
endliche erstrecken und übrigen paarweise einander gleich werden. Solche Umrisspolygone haben wir in der  $x, y$ - und in der  $x', y'$ -Ebene. Sollen die Figuren der beiden Ebenen affin verwandt sein, so müssen diese natürlichen Umrisspolygone in einander projiziert werden können.

Do. d. 5. XII. Wir beschäftigen uns im Folgenden mit dem geometrischen Studium der natürlichen Umrisspolygone, wobei wir bequemer Weise an die bereits untersuchten Eigenschaften der Kettenbruchpolygone anknüpfen werden. Da von den 4 Polygonen je zwei mit einander congruent sind, brauchen wir nur von 2 Polygonen zu sprechen (die wir vorübergehend  $P$  und  $P'$  nennen)

Wir beginnen somit, ein für unsere Betrachtung geeignetes Koordinatensystem zu definieren. Wir wählen als Einheitsvector der  $x$ -Achse die Strecke von  $O$  nach irgend einem Gitterpunkte auf einem der beiden Umrisspolygone (sagen wir auf  $P$ ). Schreiten wir

von diesem Punkte aus längs einer  $P_2$ -  
lygonseite von  $P'$  fort, so kommen wir  
auf dieser sicher noch zu einem zwei-  
ten Gitterpunkte.

Zur Verbindungs-  
strecke von jenem  
nach diesem Gitter-  
punkte ziehen wir  
durch  $O$  eine Paral-  
lelstrecke. Der End-  
punkt der letzten



fällt gleichfalls auf einen Gitterpunkt, u. z. n.  
auf einen Gitterpunkt des Umrisspolygo-  
nes  $P'$ . Diese Parallelstrecke wählen wir  
als Einheitsvector der  $y$ -Coordinate.

Es zeigt sich, daß das von diesen Ein-  
heitsvectors bestimmte Parallelogramm  
in seinem Innern keinen Gitterpunkt  
enthalten kann. Für die eine (in der  
Figur schraffierte) Hälfte des Parallelo-  
gramms ist dieses nach den Eigen-  
schaften der Umrisspolygone evident.  
Wegen der Symmetrie der Gitterfigur  
kann dann aber auch die andere  
(nicht schraffierte) Hälfte einen

Gitterpunkt in ihrem Innern nicht enthalten. Das so definierte Koordinatensystem besitzt daher ein Elementarparallelogramm vom Flächeninhalte 1; es ist ein Elementarkoordinatensystem. Außerdem besitzt es die für das folgende wesentliche Eigenschaft, daß seine Ebenen durch die  $w$ -Linien der indefiniten Form getrennt werden. Da nämlich der  $x$ -Vector auf dem einen, der  $y$ -Vector auf dem anderen Umrißpolygon der  $w$ -Linien endet, so liegt die eine Fundamentallinie (sagen wir  $w_1$ ) im ersten, die andere ( $w_2$ ) im zweiten Quadranten des  $x, y$ -Systems. Sind die Gleichungen der beiden Geraden in unserem Koordinatensystem

$$\frac{x}{y} = N_1 \text{ und } \frac{x}{y} = N_2$$

so haben in Folge dessen  $N_1$  und  $N_2$  verschiedene Vorzeichen. Jedes Koordinatensystem, für welches dieses zutrifft, nennen wir ein reducirtes Coor.

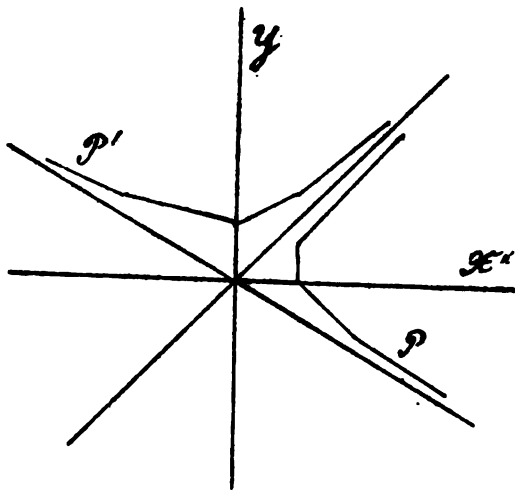
Einatensystem, desgleichen bezeichnen wir unsere hyperbolische Form, nachdem wir sie auf ein solches Coordinatensystem transformirt haben, als reducirte Form. Ist

$$F_2 = Ax^2 + B'xy + Cy^2$$

eine reducirte Form, so folgt aus dem ungleichen Vorzeichen der Wurzeln von  $F_2$  unmittelbar, daß die Coefficienten  $A$  und  $C$  ihrerseits angleiches Vorzeichen besitzen. Umgekehrt hat auch jede indefinite Form in welcher  $A$  und  $C$  verschiedenes Vorzeichen haben, zwei Wurzeln von entgegengesetztem Zeichen. Wir können daher die Definition der reducirten Formen hier kurz folgendermassen fassen: Eine reducirte Form ist eine solche, für welche  $AC < 0$  ist.

Die Beziehung zwischen den natürlichen Wurispolygonen und den Polygonzügen der zu den Fundamentallinien gehörigen Kettenbruchentwickelungen gestaltet sich in einem reducirten Coordinatensystem besonders einfach. Entwickeln wir nämlich  $S_2$  in einen Kettenbruch, so erhalten wir zwei Polygonzüge, welche nach der früher gegebenen

in dependenten geometrischen Con-  
 stitution jener Polygonzüge notwendig-  
 ger Weise Teile unserer natürlichen Uhr-  
 risspolygone  $P$  und  $P'$  sind. Es sind näm-  
 lich die im  
 ersten Qua-  
 dranten des  
 $x, y$  Systems  
 gelegenen  
 Stücke von  
 $P$  und  $P'$ .



Entwickeln  
 wir ferner  
 $N_2$  in einen  
 Kettenbruch,

so sind zu-  
 gehörigen Polygonzüge dieses Kettenbruchs  
 die übrig bleibenden Teile der natürli-  
 chen Uhrisspolygone, nämlich die im  
 2<sup>ten</sup> und 4<sup>ten</sup> Quadranten gelegenen  
 Stücke von  $P$  und  $P'$ . In einem redu-  
zieren Coordinatensystem setzen sich al-  
so die natürlichen Uhrisspolygone aus  
den Kettenbruchpolygonen der Wurzeln  
 $N_1$  und  $N_2$  direct zusammen. Bei

einem nicht reducirten Coordinatensystem dagegen liegen die Verhältnisse nicht ganz so einfach

Daraufhin übertragen sich die Eigenschaften der Kettenbruchpolygone von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  ohne Weiteres auf die natürlichen Umrisspolygone. Wir heben die folgenden Punkte hervor:

1. Zu jeder Seite des einen Polyganzes ( $\mathcal{P}$ ) gehört eine bestimmte Ecke des anderen ( $\mathcal{P}'$ ). Wir haben nämlich bei der Construction der Kettenbrüche die Seite  $(r-1)(r+1)$  dadurch erhalten, daß wir durch  $(r-1)$  eine Parallele zu dem Vector  $O(r)$  zogen. Der Punkt  $(r)$  ist daher der Seite  $(r-1)(r+1)$  eindeutig zugeordnet, wir bezeichnen ihn als den jener Seite „gegenüberliegenden“ Eckpunkt.

2. Die Seite  $(r-1)(r+1)$  beruht dabei nicht gerade die Länge des Vectors  $O(r)$  zu besitzen. Sie könnte auch ein ganzzahliges, ( $\mu$ -faches) Multiplum jenes Vectors sein. In dieser Weise gehörte zu jeder Seite der Kettenbruchpolygone eine ganze Zahl  $\mu$ , welche gleich der um 1 vermehrten

Anzahl der Nebenspitze im Innern der Seite war. Dementsprechend gehört auch zu jeder Seite unserer natürlichen Umrissepolygone eine ganze Zahl  $\mu_i$ . Wir versehen diese Zahlen in der Weise mit Indices, dass sich die Zahlen  $\mu_r$  mit ungeradem Index auf die Seiten von  $P$  die mit geradem Index auf die Seiten von  $P'$  beziehen. Dadurch bekommen wir zwei Reihen beiderseitig in's Unendliche verlaufender ganzer Zahlen, welche so wie die Reihen der geraden und ungeraden Zahlen in ihrer natürlichen Folge geordnet sind:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \mu_{-3} & ; & \mu_{-1} & , & \mu_1 & , & \mu_3 & , & \dots \\ \dots & , & \mu_{-2} & , & \mu_0 & , & \mu_2 & , & \mu_4 & , \dots \end{array}$$

3. Wir können diese Zahlenreihen an sich ganz beliebig annehmen und dadurch die Lage der Geraden willkürlich  $N_1$  und  $N_2$  festlegen. In der That setzen sich aus jeder solchen Zahlenreihe zwei Kettenbrüche zusammen, durch welche immer ein und nur ein Wertepaar  $N_1, N_2$  bestimmt wird.

Wir gehen nun dazu über, diese Ideen für das Äquivalenzproblem der indefiniten Formen zu fructifizieren. Der genaueren Durchführung stellen wir zunächst eine kurze Übersicht der abzuleitenden Resultate voraus.

1. Von einer vorgelegten indefiniten Form

$$f. a x^2 + b x y + c y^2$$

gelangen wir zu einer reducirten Form

$$F. A X^2 + B X Y + C Y^2$$

durch Einführung eines reducirten Coordinatensystems, in dem wir den Einheitsvector  $Ox$  nach einem Gitterpunkt einer beliebigen Polygonecke von  $P$ , den Einheitsvector  $Oy$  nach dem gegenüberliegenden Eckpunkte von  $P$  ziehen.

2. Diese Einführung ist auf sehr verschiedene Arten möglich. Es gehört daher zu einer indefiniten Form  $f$  eine ganze Serie reducirter Formen  $F$ . Dabei erhalten wir die ganze Serie aus einer einzelnen reducirten Form, in dem wir den  $X$ - und den  $Y$ -Vector in gesetzmässiger Weise alternierend



längs der Seiten der Umrisspolygone entlang schieben.

3. Die Bedingung für die „Äquivalenz“ zweier gegebener indefiniter Formen besteht dann einfach darin, daß die Varien der reducirten Formen oder auch nur irgend ein Paar reducirter Formen aus den beiderseitigen Varien übereinstimmen muss.

Frei. d. 6. XII. Wir beginnen mit einigen Details über die reducirten Formen.

Als Kennzeichen für eine reducirte Form fanden wir die Ungleichung:  $AC < 0$ .

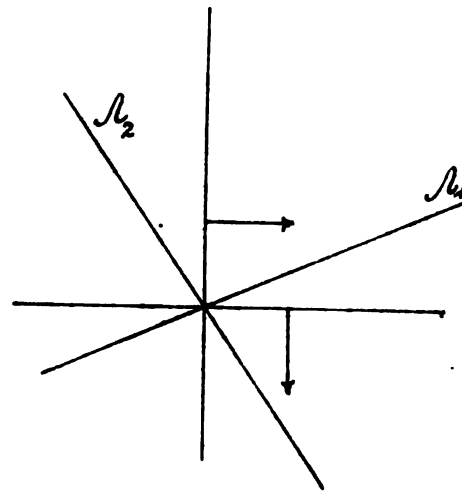
Wir können es dabei noch so einrichten, daß speziell  $A > 0$  und  $C < 0$  wird. Ist nämlich das Umgekehrte der Fall, so brauchen wir nur die Benennung des  $x$ - und des  $y$ -Vektors, und also auch die der Coefficienten  $A$  und  $C$  zu vertauschen, um auf die vorstehenden Ungleichungen zu kommen. Nach dieser Vereinbarung werden also die reducirten Formen stets in demjenigen durch die  $N_1$ - und  $N_2$ -Linie begrenzten Doppelvector positiv sein,

in welchem die  $x$ -Axe enthalten ist.

Wir machen sodann einen Unterschied zwischen Hauptreducirten und Nebenreducirten. Wir nennen eine Form hauptreducirt dann, wenn sowohl der  $x$ - wie der  $y$ -Vector ihres Coordinatensystems nach einem Hauptpunkte der Umrisspolygone verläuft, nebenreducirt dann, wenn einer dieser Vektoren in einem Nebenpunkte endigt. (Der andere Vektor endigt dann sicher in einem Hauptpunkte, nämlich in demjenigen Gitterpunkte, welcher der Polygonecke des Nebenpunktes gegenüberliegt und welcher notwendig ein Eckpunkt des anderen Umrisspolygones ist.) Innerhalb der Haupt- und Nebenreducirten unterscheiden wir ferner noch je zwei Möglichkeiten a) und b). Wir betrachten zunächst die Hauptreducirten. Durch den Endpunkt des  $y$ -bez.  $x$ -Vectors geht je eine Seite der Umrisspolygone hindurch, welche parallel der  $x$ - bez.  $y$ -Axe verläuft. Im Falle a) möge die Poly.

genseite durch den Einheitspunkt auf der  $y$ -Achse nach dem ersten Quadranten hin verlaufen. Dann zieht die der  $y$ -Achse parallele Polygonseite im Einheitspunkte der  $x$ -Achse in den 4<sup>ten</sup> Quadranten hinein. Wir zeichnen unser Coordinatensystem der Einfachheit halber als gewöhnliches rechtwinkeliges Coordinatensystem. Die Linie  $N_1$  liegt dann notwendiger Weise zwischen der

$x$ -Achse und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten, die Linie  $N_2$  zwischen der  $y$ -Achse und der Winkelhalbierenden des zweiten Quadranten. In

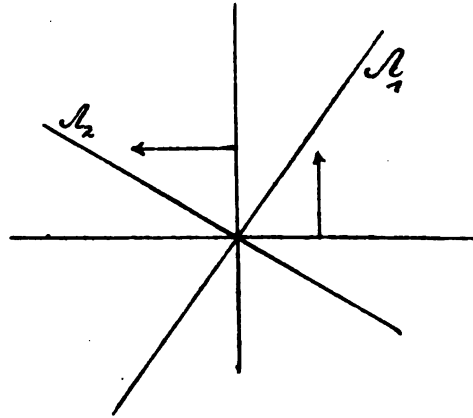


diesem Falle ist

$$|N_1| > 1, |N_2| < 1.$$

Im Falle b) der Hauptreducirten möge die Polygonseite durch den Endpunkt

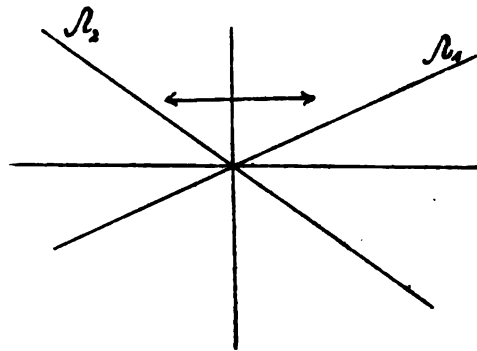
des  $y$ -Vektors in den 2. Quadranten hinein verlaufen. Dann weist die Polygonseite im Einheitspunkt der  $x$ -Achse nach dem ersten Quadranten hin. Dementsprechend ändert sich die Lage der Linien  $N_1$  und  $N_2$ . Wir haben in diesem Falle:



$$|N_1| < 1, |N_2| > 1.$$

Bei den Nebenreducirten ist einer der Einheitspunkte ein Nebenpunkt, d. h. ein innerer Gitterpunkt einer Polygonseite. Sei dieses im Falle a) der Einheitspunkt auf der  $y$ -Achse, im Falle b) der auf der  $x$ -Achse.

Im Falle a) verlaufen die  $N$ -Linien beiderweisen der positiven bez. negativen  $x$ -Achse u.



den Winkelhalbierenden. In diesem Falle  
ist also

$$|N_1| > 1, |N_2| > 1$$

Im Falle b.) liegen die  $N$ -Linien zwischen  
der  $y$ -Achse und  
den beiden Winkelhalbierenden.

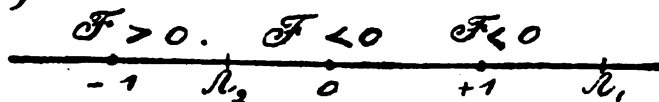
Es wird daher  
 $|N_1| < 1, |N_2| < 1$ .

Um die Wurzel-  
verteilung in  
den verschiede-

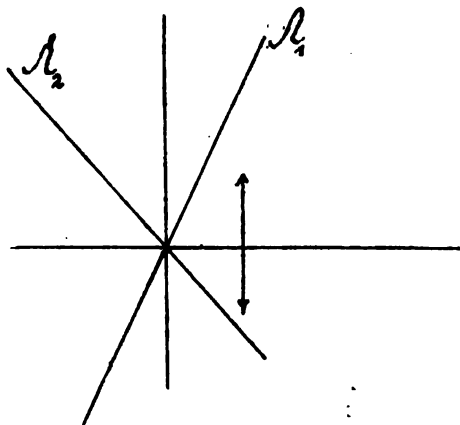
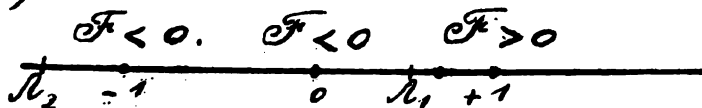
nen Fällen noch

besser übersehen zu können, repräsentieren  
wir uns die möglichen Werte von  $x/y$  je  
durch eine besondere Gerade. Wir haben  
auf dieser die folgende relative Lage  
der Werte  $N_1, N_2, +1, 0, -1$  gegen einander:  
im Falle der Hauptreduzierten

a)

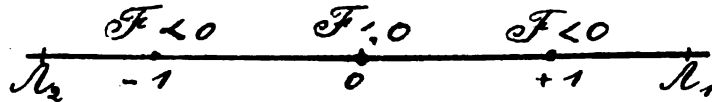


b.)

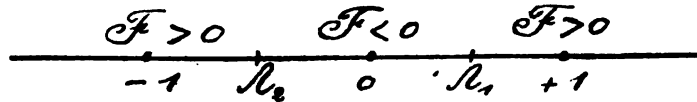


im Falle der Nebenreducirten

a)



b)



Wir tragen ferner in unsere Schemata Vorgeichen von  $F$  in den Punkten  $+1$  und  $-1$  ein. Da nach Vereinbarung  $F$  längs der  $x$ -Axe positiv, so ist es längs der  $y$ -Axe negativ. Dem Punkte  $x/y=0$  kommt daher in allen 4 Fällen das negative Vorgeichen zu. Dasselbe Vorgeichen gilt auch nach beiden Seiten von  $0$  aus bis an die Stellen  $N_1, N_2$  heran und geht jenseits derselben in das positive über. Danach ist es klar, welche Vorgeichen der Form an den Stellen  $+1$  und  $-1$  stattfinden. Wir erkennen: Unsere 4 Fälle sind durch diese Vorgeichen von einander unterschieden.

Wir können hierauf sofort die arithmetischen Kriterien für unsere 4 Fälle hinschreiben. Wir erhalten nämlich,

indem wir  $x = 1, y = 1$ , bez.  $x = -1, y = -1$  in  $F$  einsetzen, die folgenden Ungleichungen:

Im Falle der Hauptreducirten

$$\underline{a)} \quad \left| \begin{array}{l} A + B + C < 0, \\ A - B + C > 0, \end{array} \right.$$

$$\underline{b)} \quad \left| \begin{array}{l} A + B + C > 0, \\ A - B + C < 0. \end{array} \right.$$

im Falle der Nebenreducirten

$$a) \quad A \pm B + C < 0$$

$$b) \quad A \pm B + C > 0.$$

Dazu kommen noch als allgemeingültige Bedingungen für reducirt Formen die folgenden:

$$A > 0 \text{ und } C < 0.$$

In den arithmetischen Darstellungen unserer Theorie, wo diese Einteilung, wenigstens was die Hauptreducirten an-  
geht, gleichfalls gemacht wird, erscheint sie als etwas sehr Willkürliches, während sie sich vom geometrischen Stand-  
punkte aus auf dem hier eingeschla-

genen Wege ganz von selbst darbietet. Man möchte fast vermuten, daß Gauß selbst bei der Entdeckung dieser Dinge von geometrischen Anhaltspunkten geleitet worden ist und daß er diese, seiner Bekannten (aber nicht nachahmenderen) Publicationsmethode zufolge, späterhin absichtlich unterdrückt hat.

Wir untersuchen nun das Gesetz, nach welchem man aus einer reducirten Form die zugehörige unbegrenzte Reihe der übrigen reducirten Formen ableiten kann.

Wir nehmen an, es sei eine Hauptreduzirte des Falles a) vorgelegt:

$$F = A, x^2 + B, x, y, + C, y^2$$

und wir sollen mit unserer Reihe an  $N_1$  entlang schreiten. Liegt der Fall b) vor, so ist einfach  $x$  und  $y$  zu vertauschen; sollen wir an  $N_2$  entlang schreiten, so haben wir die ganze Reihe der Operationen umzukehren. Unser ursprüngliches reducirtes Coordinatensystem  $x, y$ , ändern wir nun in gesetzmäßiger Weise so ab, daß es beständig ein reducirtes Coordinatensystem bleibt.



Wir beginnen damit, den  $y$ -Vektor der  $x$ -Achse parallel um eine Einheit zu verschieben. Sein Endpunkt wandert dabei auf  $P'$  vergl. die erste Figur auf pag. 117. Analytisch bedeutet dieses, dass wir die Substitution

$$x_1 = x'_1 + y'_1$$

$$y_1 = y'_1$$

ansetzen, die wir früher als Substitution  $S$  bezeichneten. Unsere Form geht dabei über in

$$A, x_1^2 + (2A_1 + B) x_1 y_1 + (A_1 + B_1 + C) y_1^2,$$

welche neue Form nach den geometrischen oder auch nach den arithmetischen Kriterien des Falles  $\alpha$  sicher gleichfalls eine reducirt ist. Es kann aber sein, dass wir diese Verschiebung noch ein zweites Mal ausführen können, ohne dass unsere Form aufhört, eine reducirt zu sein, dann vielleicht ein drittes Mal, etc. etc. Sei die grösste Anzahl von Malen, dass dieses möglich ist,  $(\mu)$ .

Dann ist die durch die Substitution

$$S^{(\mu)}, \text{ aus } F \text{ abgeleitete Form}$$

$$(A, 2A_1, \mu, + B_1, B, (\mu, 2 + B_1, (\mu, + C))$$

noch eine reducirte Form, ihr letzter Coefficient  $A, \mu,^2 + B, \mu, + C,$  also noch negativ. Durch abermalige Ausübung der Substitution  $S$  dagegen wird eine Form entstehen, deren letzter Coefficient positiv ist. Denn wir würden bei nochmaliger Verschiebung des  $y$ -Vectors die  $A,$ -Linie überschreiten. Die Zahl  $\mu,$  können wir daher arithmetisch so definiren: Es ist die größte ganze Zahl, für welche die Ungleichung besteht:

$$A, \mu,^2 + B, \mu, + C, < 0$$

Setzen wir nun

$$A_2 = A, \mu, + B, \mu, \quad B_2 = A, \mu,^2 + B, \mu, + C, = C_2,$$

so ist

$$(A_2, B_2, C_2)$$

widerum eine Hauptreducirte Form, aber eine  $b$ ). Denn es ist jetzt

$$\begin{cases} A_2 + B_2 + C_2 > 0 \\ A_2 - B_2 + C_2 < 0 \end{cases}$$

Wir sagen, dass

$$A_2, B_2, C_2.$$

auf die Hauptreducirte  $(A_2, B_2, C_2)$  bei der gewählten Fortschreitungsrichtung langs  $P'$  zuerst folgt.

Nun operiren wir in ähnlicher Weise

mit dieser Form ( $A_2, B_2, C_2$ ), indem wir nun die Rollen von  $x$  und  $y$  vertauschen. Wir verschieben den  $x$ -Vektor ihres Koordinatensystems ( $x_2, y_2$ ) parallel der  $y_2$ -Achse um so viele Einheiten, als möglich, d. h. solange die die Form dabei reducirt bleibt. Analytisch bedeutet dieses, dass wir die Substitution  $S'$ :

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = x'_2 \\ y_2 = x'_2 + y'_2 \end{array} \right\} S'$$

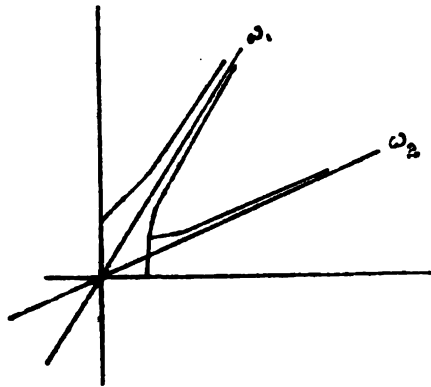
eine Anzahl von Malen ( $\mu_2$ -mal) ausführen, wobei  $\mu_2$  diejenige grösste ganze Zahl ist, für welche

$$A_2 + B_2 (\mu_2 + C_2 \mu_2^2)$$

nach positiv ist. Die Substitution  $S'^{\mu_2}$  lässt dann aus ( $A_2, B_2, C_2$ ) wiederum eine Hauptreduirte  $a$ ) entstehen, welche wir mit ( $A_3, B_3, C_3$ ) bezeichnen. An der neuen Hauptreducirten operiren wir in derselben Weise mit der Substitution  $S$  und bekommen so fortgehend eine unbegrenzte Reihe von Hauptreducirten Formen. Es ist ferner klar, dass wir diese Operationen von

( $A_1, B_1, C_1$ ) ausgehend auch nach rückwärts fortsetzen können und müssen. Auch nach dieser Richtung wird die Reihe der Hauptreducirten eine unbegrenzte sein. Wir schreiten dann eben an  $N_2$  entlang. Die Aufstellung der ganzen beiderseitigen, endlichen Kette von Formen ist hiemit erledigt; es handelt sich dabei, wie wir sehen, um eine ganz elementare Rechenvorschrift.

Wir haben noch als Ergänzung des Vorstehenden anzugeben, wie man von einer beliebigen Form  $f$  zu einer ersten reducirten Form  $F$  gelangen kann. Wir wollen uns den Weg kurz an der Figur klar machen. Wir betrachten die zu den Wurzeln  $w_1, w_2$  von  $f=0$  gehörigen Kettenbruchentwickelungen. Ihre Umrisse  $polygone$  müssen von einer gewissen Stelle ab sich mit den



natürlichen Umrisspolygonen decken. Wenn wir also dasjenige Coordinatensystem, auf welches  $f$  ursprünglich bezogen ist, und welches wir als nicht reducirt voraussetzen wollen, längs der Umrisspolygone der Entwicklungen von  $w$ , (oder auch von  $w_2$ ) in der durch den Kettenbruch in dieirten Weise entlang schieben, so bringen wir es durch eine endliche Anzahl solcher Verschiebungen schließlich in eine Lage, wo seine Einheitsvectoren in Eckpunkten von  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}'$  endigen, wo also das Coordinatensystem ein reducirtes geworden ist. Gleichzeitig ist dann aus  $f$  eine reducirte Form  $\mathcal{F}$  entstanden. Der Unterschied gegen vorhin ist dabei dieser!

Während wir von einer reducirten Form  $\mathcal{F}$  zu neuen reducirten mittelst rationaler Kriterien fortschreiten konnten, mussten wir, wie wir gerade schilderten, zur Aufstellung einer ersten  $\mathcal{F}$  die irrationalen Grössen  $w_1, w_2$  selbst bez. ihre Kettenbrüche zu Hülfe nehmen. Es handelt sich eben zunächst noch darum, was bei einer reducirten  $\mathcal{F}$

von vorne herein gegeben ist, nämlich die Wurzeln von  $f=0$  zu separiren.

Do. d. 12. XII. Wir werden heute untersuchen, welche besonderen Verhältnisse eintreten, wenn wir die Annahme hinzunehmen, daß die gegebene indefinite Form eine ganzzahlige Form ist. Wir nehmen an, daß die Coefficienten der Form commensurabel sind und schreiben dementsprechend

$$f = H (ax^2 + bxy + cy^2),$$

wo  $a, b, c$  ganze Zahlen,  $H$  einen beliebigen Factor bedeutet. Von den Coefficienten  $a, b, c$  nehmen wir ferner an, daß sie teilerfremd sind, d. h. nicht alle drei einen gemeinsamen Factor besitzen. In diesem Falle nennen wir  $ax^2 + bxy + cy^2$  eine primitive Form.

Das Resultat der letzten Stunde hinsichtlich der reducirten Formen lautet folgendermassen: In jeder Form  $f$  giebt es eine beiderseits unbegrenzte Reihe von Hauptreducirten Formen

$$F_i = (a_i, b_i, c_i)$$

$$F_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

$$F_3 = (a_3, b_3, c_3)$$

Ist  $F_1$  eine Hauptreducirte des Falles a), so sind es auch  $F_3, F_5, \dots$ , während  $F_2, F_4, \dots$  Hauptreducirte des Falles b) sind. Diese Formen hängen wie die Glieder einer Kette untereinander zusammen; es wird nämlich  $a_1 = a_2, c_2 = c_3, a_3 = a_4$  etc.

Da alle diese Formen unter sich und mit der gegebenen Form durch affine Substitutionen von der Determinante 1 zusammenhängen, so haben sie die gleiche Discriminante

$$D = b^2 - 4ac.$$

Sei  $F = (A, B, C)$  eine beliebige Form aus der Reihe der reducirten. Da unserer Verabredung nach bei reducirten Formen  $C < 0$ , schreiben wir der Deutlichkeit halber  $-C'$  statt  $C$ , setzen also

$$F = (A, B, -C').$$

wo jetzt  $C'$  und ebenso  $A$  positive Zahlen sind. Die Discriminante von  $F$  hat dann folgende Gestalt:

$$D - B^2 + 4AC'$$

Jetzt bringen wir unsere Voraussetzung zur Geltung, dass  $A, B, C, D$  ganze und dass  $A, C, D$  positive Zahlen sind. Auf diese Voraussetzung gründen wir einen spezifisch zahlentheoretischen Schluss von übrigens äusserst einfachem Character. Wir denken nämlich  $D$  als feste Zahl gegeben und fassen die vorstehende Gleichung als Diophantische Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten  $A, B, C'$  auf. Wir können dann sofort sagen: es gibt nur eine endliche Anzahl von ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung mit positiven Werten von  $A$  und  $C'$ . Um sie alle zu bekommen, können wir so verfahren: Wir setzen  $B = 0, 1, 2, \dots, E(\sqrt{D})$  (wo  $E(\sqrt{D})$  die grösste ganze Zahl  $\leq \sqrt{D}$  bedeutet) und sehen zu, ob  $D - B^2$  durch 4 teilbar ist oder nicht. Im letzteren Falle hat die Gleichung sicher keine Lösung, im ersteren zerlegen wir  $D - B^2$  auf alle mögliche Weise in Factoren.



So erhalten wir alle möglichen Werte von  $A$ ,  $C'$  und  $B$ .

Das Resultat dieser Betrachtung ist der folgende wichtige Satz: Zu einer gegebenen Discriminante gehört nur eine endliche Anzahl reducirter Formen ( $A, B, C$ ).

Nun hatten wir gelernt aus einer Form eine unendliche Serie reducirter Formen

$$\dots F_{-1}, F_0, F_1, F_2, \dots$$

zu erzeugen. Da überhaupt nur eine endliche Anzahl von solchen Formen zur Verfügung steht, muß eine Form in dieser Serie mehrmals vorkommen. Sei  $F_r$  diese Form; dann gibt es eine erste Form  $F_{r+1}$ , welche dieselben Coefficienten,  $A, B, C$  hat, wie  $F_1$ . Nun entstand aus  $F_1$  durch einen gewissen Process die ganze Reihe der Formen  $F$ . Sind wir bei diesem Process bis  $F_{r+1}$  gekommen, so haben wir, um zu  $F_{r+2}$  etc. zu kommen, mit  $F_{r+1}$  dieselben Operationen vorzunehmen, wie mit  $F_1$ . Wir werden daher bei demal dieselben Formen erhalten:

$$F_{r+2} = F_2, F_{r+3} = F_3, \dots F_{2r+1} = F_{r+1} = F_1$$

etc. Wir können auch von  $F_r$  nach rückw.

durch eine Wiederholung der Substitutionen  $S$  oder  $S'$ ). Es hängen also auch die Coordinatensysteme  $x, y$ , und  $x_{r+1}, y_{r+1}$ , welche zu  $F$ , bez.  $F_{r+1}$  gehören durch eine Substitution von derselben Beschaffenheit zusammen:

$$\sum \left| \begin{array}{l} x_i = \alpha x_{r+1} + \beta y_{r+1} \\ y_i = \gamma x_{r+1} + \delta y_{r+1} \end{array} \right. \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Diese Substitution führt  $F$ , in sich selbst über, wir bezeichnen sie als eine Automorphie der Form.

Alle Substitutionen, zu welchen wir beim Übergang von einer Elementarfigur unserer Reihe zu einer andern kommen, haben die Eigenschaft, nicht nur die Determinante 1 zu besitzen, sondern die positive  $x$ -Axe in demselben Sector zwischen den Linien  $N_1$  und  $N_2$  zu belassen. Wir wollen eine Substitution von dieser Eigenschaft vorübergehend eine reguläre nennen. Ein Beispiel einer nicht regulären Substitution liefert die folgende:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2, & \text{oder auch} & & x_1 &= -y_2 \\ y_1 &= -y_2, & & & y_1 &= +x_2 \end{aligned}$$

Wir bezeichnen daher genauer unsere Automorphie als eine reguläre Auto-  
morphie.

Gehen wir sodann von  $\mathbb{F}_{r+1}$  zu  $\mathbb{F}_{2r+1}$  weiter, so geschieht dieses gleichfalls durch eine affine Transformation von der Determinante 1. Es zeigt sich sofort, dass diese mit  $\Sigma$  identisch sein muss. Denn der Übergang von dem Koordinatensystem  $(r+1)$  zu  $(2r+1)$  setzt sich durch genau dieselbe Combination der Operationen  $S$  und  $S'$  zusammen, wie der Übergang von  $(1)$  zu  $(r+1)$ .

Wollen wir zu neuen regulären Automorphismen kommen, so können wir also nichts anderes machen, als dass wir die Operation  $\Sigma$  wiederholen, d. h. von  $\mathbb{F}_1$  direct zu  $\mathbb{F}_{2r+1}$ ,  $\mathbb{F}_{3r+1}$  etc. übergehen. Wir bilden uns also die Reihe der folgenden Substitutionen:

$$\dots \Sigma^{-2}, \Sigma^{-1}, \Sigma^0, \Sigma, \Sigma^2, \dots$$

Wir erhalten so eine unendliche Reihe

von Automorphismen der Form  $F_1$ . Alle Substitutionen dieser Reihe sind von einander verschieden. In der That wird das Coordinatensystem (1), wie aus der Figur hervorgeht, durch alle diese Substitutionen in lauter verschiedene neue Lagen gebracht. Andererseits gibt es auch keine anderen regulären Automorphismen von  $F_1$ , als die hingeschriebenen. Denn es muß jede solche Substitution die Reihe der reducirten Formen in sich überführen, sie muß also eine derjenigen Coordinatentransformationen sein, welche die Elementarfigur (1) in eine der anderen reducirten Elementarfiguren verwandelt. Die obige Reihe enthält aber alle diejenigen Coordinatentransformationen dieser Art, bei welchen  $F_1$  in sich übergeht.

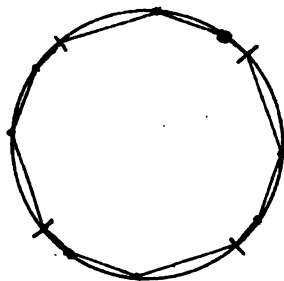
Die Operation  $\Sigma$  mit ihren positiven und negativen Potenzen liefert uns also die sämtlichen, unendlich vielen regulären Automorphismen unserer Form.

Man kann diesen Dingen noch eine interessantere Wendung geben, wenn man berücksichtigt, daß jede Substitution neuer Veränderlicher in der analytischen Geometrie auf doppelte Weise aufgefaßt werden kann: entweder als Koordinatentransformation bei festgehaltener Figur, oder als Figurentransformation bei festgehaltenem Koordinatensystem. Bisher haben wir unsere Automorphie vom Standpunkte der Koordinatentransformation betrachtet. Denken wir uns jetzt das Koordinatensystem fest. Dann stellt die Substitution  $\Sigma$  eine affine Umformung der Ebene dar. Da ihre Coefficienten ganze Zahlen sind, so gehen dabei die Gitterpunkte wieder in Gitterpunkte über. Da ferner  $F_1$  in sich übergeführt wird und da  $F_1 = 0$  die Gleichung der  $N$ -Linien ist, so bleiben die  $N$ -Linien bei jener Umformung ungeändert. Da endlich  $\Sigma$  eine reguläre Substitution ist, so ver-

den auch die zwischen den  $N$ -Linien  
 gelegenen Sektoren in sich überführt.  
 Wir nannten aber eine solche affine Um-  
 formung, bei welcher die  $N$ -Linien fest-  
 bleiben und die  $N$ -Sektoren in sich  
 verwandelt werden, eine Pseudodre-  
 hung. Bei unserer zweiten Auffassung  
ist also die Operation  $\Sigma$  eine Pseudo-  
drehung um  $O$ , welche das Punktgit-  
ter als Ganzes ungeändert lässt.  
 Auf Grund des Früheren können wir  
 sagen: es gibt unendlich viele solcher  
Pseudodrehungen; dieselben werden  
durch die positiven und negativen  
Potenzen von  $\Sigma$  erschöpft.

Gleichzeitig mit den  $N$ -Linien und  
 den Punktgittern werden auch die Um-  
risppolygone der letzteren durch unsere  
 Pseudodrehungen mit sich zur Deckung  
 gebracht. Dieselben besitzen also ei-  
 ne Regelmässigkeit <sup>(ähnlich)</sup> der der regu-  
 laren Polygone in der Elementar-  
 geometrie. Während aber bei die-  
 sen jede Seite mit jeder anderen  
 durch eine gewisse Drehung

und deren Wiederholungen zur Deckung gebracht wird, wird bei unseren Polygonen immer erst ein gewisser Complex von Seiten in einen ande-



ren solchen Complex übergeführt. Die nebenstehende Figur stellt das entsprechende Vorkommen in der gewöhnlichen Haassbestimmung dar. Wir wollen ein solches Polygon als semiregulär bezeichnen. Von unseren Umrispolygonen werden wir daher sagen können: sie sind pseudosemiregulär.

Hier entsteht vor Allem die Frage nach der (hyperbolisch gemessenen) Grösse des zur Substitution  $\Sigma$  gehörigen Drehungswinkels. Diese Frage werden wir unter anderen beantworten, indem wir im Folgenden als analytische Ergänzung zum Vorhergehenden die Theorie der

Péll'schen Gleichung entwickeln.

Wir gehen aus von der Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

und suchen eine reguläre Substitution

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned} \quad | \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

welche  $f$  in sich überführt. Die Rechnung wird ganz einfach, wenn wir Folgendes berücksichtigen: Die angesriebene Substitution lässt den Nullpunkt und zwei Strahlen durch denselben ungeändert. Die Gleichung der letzteren ergibt sich, wenn wir  $x' = \varrho x$ ,  $y' = \varrho y$  setzen; sie lautet

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y} \quad \text{oder} \quad \gamma x^2 + (\delta - \alpha)x + \beta y = 0.$$

Soll die Form  $f$  bei unserer Substitution in sich übergehen, so müssen diese beiden Strahlen mit den  $N$ -Linien ( $f=0$ ) zusammenfallen. Es müssen also die Coefficienten in den Gleichungen beider Geradenpaare proportional sein:



$\gamma = \alpha u$ ,  $\mathcal{I} - \alpha = \beta u$ ,  $\beta = -cu$ ,  
 unter  $u$  eine ganze Zahl verstanden.  
 Setzen wir noch  $\mathcal{I} + \alpha = t$ , so berechnet  
 sich:

$$\alpha = \frac{t - \beta u}{2}, \quad \beta = -cu$$

$$\gamma = \alpha u, \quad \mathcal{I} = \frac{t + \beta u}{2}.$$

Die Zahlen  $t$  und  $u$  sind nun nicht  
 willkürlich; aus der Relation  $\alpha\beta\gamma = 1$   
 folgt nämlich:

$$t^2 - 4u^2 = 4.$$

Dies ist die berühmte Pell'sche Gleichung.

Jede ganzzahlige Lösung dieser Gleichung liefert uns eine Automorphie von  $f$ .

Frei. d. 13. XII. Wir erhalten übrigens durch die Pell'sche Gleichung ausser den regulären Automorphismen auch diejenigen, bei denen die  $\mathcal{I}$ -Sektoren vertauscht werden. Eine Lösung ist nämlich auch:

$$t = \pm 2, \quad u = 0;$$

zu dieser gehört die Substitution

$$\alpha = \pm 1 \quad \beta = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm x'$$

$$f = 0 \quad \gamma = \pm 1 \quad y = \pm y'$$

so dass für  $t = -2$   $x = -x'$ ,  $y = -y'$  entsteht.

Setzen wir diese Substitution mit den sämtlichen regulären zusammen, so ergeben sich die sämtlichen nicht regulären Substitutionen von  $f$  in sich selbst.

Besonders einfach werden alle diese Transformationsgleichungen in Minimalkoordinaten. Wir spalten  $f$  in zwei Factoren

$$f = \xi \eta$$

$$\xi = m \left( \sqrt{a} x + \frac{b + \sqrt{a}}{2} y \right)$$

$$\eta = \frac{1}{m} \left( \sqrt{a} x + \frac{b - \sqrt{a}}{2} y \right),$$

wobei die Hinzufügung der Factoren  $m, \frac{1}{m}$  nur eine Änderung des Azimuthes bedeutet, unter welchem wir unser Gitter gegen das Coordinatensystem „orientiren“.  $\xi, \eta$  sind die Minimalkoordinaten des Punktes  $x, y$ . Seien ferner  $\xi', \eta'$  Minimalkoordinaten desjenigen Punktes  $x', y'$ , in welchem der Punkt  $x, y$  durch eine

Automorphie von  $f$  übergeführt wird,  
so daß

$$\xi' = m \left( \sqrt{a} x' + \frac{b + \sqrt{D}}{2} y' \right)$$

$$\eta' = \frac{1}{m} \left( \sqrt{a} x' + \frac{b - \sqrt{D}}{2} y' \right).$$

Tragen wir in die Ausdrücke für  $\xi$  und  $\eta$  die Werte von  $x$  und  $y$  aus den Substitutionsformeln der vorletzten Seite ein, so ergibt sich einfach:

$$\xi = \frac{t + \sqrt{D} u}{2} \xi',$$

$$\eta = \frac{t - \sqrt{D} u}{2} \eta'.$$

Die Minimalkoordinaten  $\xi, \xi'$  und  $\eta, \eta'$  zweier durch die Automorphie zugeordneter Gitterpunkte sind also untereinander proportional. Es ist dieses selbstverständlich, weil ja die Minimallinien  $\xi = 0, \eta = 0$  bei der Automorphie nicht geändert werden.

Wir geben der Pell'schen Substitution noch eine etwas andere Form, indem wir statt  $f = 0$  schreiben:  $a w^2 + b w + c = a (w - w_1)(w - w_2) = 0$ . Dann wird  $\xi = n(w - w_2)$ ,

$\eta = n' (w - w_2)$  wo  $n$  und  $n' w_2$  bestimmt bleibende Factoren sind, also

$$\frac{\xi}{\eta} = \left(\frac{n}{n'}\right) \frac{w - w_1}{w - w_2}; \text{ ebenso haben wir}$$

$$\frac{\xi'}{\eta'} = \left(\frac{n}{n'}\right) \frac{w' - w_1}{w' - w_2}.$$

Die Pöll'sche Substitution kann daher folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{t + u \sqrt{D}}{t - u \sqrt{D}} \cdot \frac{w' - w_1}{w' - w_2}$$

oder mit Rücksicht auf die Pöll'sche Gleichung:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \left(\frac{t + u \sqrt{D}}{2}\right) \frac{w' - w_1}{w' - w_2}.$$

Die Proportionalitätsfactoren müssen, da  $\xi \eta = \xi' \eta'$  ist, der Bedingung genügen, dass ihr Product gleich 1 ist.

Hierdurch characterisirt sich unsere Automorphie als Pseudodrehung. In der That haben wir der Pöll'schen Gleichung zufolge:

$$\frac{t^2 - D u^2}{4} = 1.$$

Da nach dieser Gleichung  $|t| > |\sqrt{D}u|$ , so hängt das Vorzeichen der Proportio=

malitätsfactoren von dem Vorzeichen von  $t$  ab. Nehmen wir  $t$  als positive Zahl, so sind auch jene Factoren positiv, die Automorphie also eine reguläre.

Die Grösse des Drehungswinkels berechnet sich nach pg 75 aus den vorstehenden Substitutionsformeln zu

$$\frac{i}{2} \lg \frac{t + \sqrt{D}u}{t - \sqrt{D}u} = \frac{i}{2} \lg \frac{(t + \sqrt{D}u)^2}{4} = i \lg \frac{(t + \sqrt{D}u)}{2}.$$

Wir combiniren jetzt diese Entwicklungen mit den früheren geometrischen Betrachtungen. Da folgt zunächst, dass die Pell'sche Gleichung sicher Lösungen hat, welche von den trivialen  $t = \pm 2, w = 0$  verschieden sind. Ferner aber sagen wir:

Da irgend zwei Automorphien nacheinander ausgeführt wieder zu einer Automorphie führen, so werden sich irgend zwei Lösungen  $t, u$  und  $t', u'$  der Pell'schen Gleichung wiederum zu einer Lösung dieser Gleichung zusammensetzen müssen. In der That, sei

$$\left\{ = \frac{t + u \sqrt{D}}{2} \right\}'$$

Hülfe einer kleinsten Automorphie  $\Sigma$  in der Form darstellen  $\Sigma^u$ . Der Zusammensetzung zweier Automorphien entspricht die Multiplication der complexen Zahlen, der Wiederholung einer Automorphie also die Potenzirung der Zahlen. Ist daher  $\frac{t_0 + u_0 \sqrt{D}}{2}$  diejenige Zahl des Systems, welche zu  $\Sigma$  gehört, so gehört zu  $\Sigma^u$  die Zahl

$$\frac{T + U \sqrt{D}}{2} = \left( \frac{t_0 + u_0 \sqrt{D}}{2} \right)^u.$$

Der zur Substitution  $\Sigma$  gehörige Drehungswinkel, nach welchem wir oben fragten, berechnet sich aus der Lösung  $t_0, u_0$  der Pell'schen Gleichung in folgender Weise

$$\phi_0 = i \lg \frac{t_0 + u_0 \sqrt{D}}{2}$$

Wir nennen  $\phi$  den Pell'schen Winkel. Wir erweitern jetzt diese Betrachtungen nach nach anderer Seite.

Wir fassen nämlich alle reducirten Formen in's Auge, welche bei gegebenem Werte der Discriminante möglich sind. Diejenigen Formen, welche

äquivalent sind, bilden eine „Klasse“ von Formen, und in den reducirten Formen haben wir „Repräsentanten“ der einzelnen Klasse: Nun ist es sehr wohl möglich, daß die zu derselben Discriminante gehörigen reducirten Formen sich auf verschiedene Klassen verteilen. Da es aber nur eine endliche Anzahl reducirter Formen giebt, so kann man aus ihnen sicher nur eine endliche Anzahl zusammengehöriger äquivalenter Formenserien herstellen. Es giebt daher bei gegebenem  $D$  nur eine endliche Anzahl unterschiedener Klassen.

Diese verschiedenen Klassen stehen sich aber nicht fremd gegenüber; sie bilden einen zusammenhängenden Organismus. Es geht dieses schon daraus hervor, daß allen diesen Klassen die Pell'sche Gleichung gemeinsam ist. In der That hängt diese Gleichung ja nur von dem Werte von  $D$ , nicht von den Besonderheiten der Klasse ab. Wir

werden, das später noch sehr viel weitergehend entwickeln.

Unter diesen Klassen giebt es eine ausgezeichnete, welche man Hauptklasse nennt. Die Hauptklasse muß etwas anders definiert werden, je nachdem der Fall  $\mathcal{D} \equiv 0(4)$  oder  $\mathcal{D} \equiv 1(4)$  vorliegt. Im ersten Falle ist die Hauptklasse diejenige, welche die Form enthält:

$$x^2 - \frac{\mathcal{D}}{4} y^2 \quad \left\{ \mathcal{D} \equiv 0(4) \right\}$$

Im zweiten Falle diejenige, in welcher die Form

$$x^2 + xy + \frac{1-\mathcal{D}}{4} y^2 \quad \left\{ \mathcal{D} \equiv 1(4) \right\}$$

vorkommt. Alle anderen Klassen der Discriminante  $\mathcal{D}$  werden als Nebenklasse bezeichnet.

Mit den soeben angeschriebenen Hauptformen hängt die Pell'sche Gleichung auf das Engste zusammen. Setzen wir nämlich im ersten Falle  $t = 2x$ ,  $u = y$ , so lautet dieselbe:

$$x^2 - \frac{\mathcal{D}}{4} y^2 = 1 \dots$$



Im zweiten Falle setzen wir  $t - u = 2x$ ,  $u = y$ ,  
dann geht die Pell'sche Gleichung über in

$$x^2 + x^2 y + \frac{1-D}{4} y^2 = 1$$

Beidemals erhalten wir aus der Pell'schen Gleichung die gleich 1 gesetzte Hauptform. Die allgemeine Lösung der Pell'schen Gleichung kommt also darauf hinaus, durch die Hauptform die Zahl 1 in allgemeiner Weise darzustellen.

Ich habe nun ein reiches Material neuer Sätze und neuer Auffassungen und es kommt darauf an, jetzt zunächst dasselbe durch Zahlenbeispiele zu illustrieren. Dabei werden sich von selbst noch einige Bemerkungen ergeben, die auf die allgemeine Theorie Bezug haben.

Ausführliche numerische Tabellen sind von Cayley berechnet worden. (Vergl. Crelle Bd. 60 oder Ges. Werke Bd. 5 pg. 141 ff.). Cayley berechnet zu allen Discriminanten  $|D| < 100$  und für einige weitere die zugehörigen Klassen quadratischer Formen.

Ferner sind derartige Tabellen von Legendre mitgeteilt worden (Vergl. Zahlentheorie Bd. I). Wir weisen in's Besondere auf die Tabelle I, welche die Theorie der Pell'schen Gleichung zum Gegenstande hat. Leider finden sich überall Unterschiede in der Bezeichnung, über die man sich vorab unterrichten muß, ehe man die Tabellen gebraucht.

Hier wollen wir  $D = 40$  annehmen. Zunächst berechnen wir die zu dieser Discriminante gehörigen sämtlichen reducirten Formen. Es handelt sich dabei um die Formen  $(A, B, C)$ , für welche  $A \cdot C < 0$  und  $B^2 - 4AC = 40$  ist. Wir stellen die Formen mit positivem  $A$  voran; die Formen mit negativem  $A$  bekommen wir aus jenen, indem wir die Vorzeichen sämtlicher Coefficienten umkehren.

Für  $B$  setzen wir nacheinander alle geraden Zahlen  $|B| < \sqrt{40}$  und suchen die zugehörigen Lösungen der Diophantischen Gleichung  $B^2 - 4AC = 40$ .

für welche  $A < 0$ ,  $A > 0$  ist. Es ergibt sich

$$B_{=0} \begin{cases} 10, & 0, & -1 \\ 5, & 0, & -2 \\ 2, & 0, & -5 \\ 1, & 0, & -10 \end{cases}$$

$$B_{=\pm 2} \begin{cases} 9, & \pm 2, & -1 \\ 3, & \pm 2, & -3 \\ 1, & \pm 2, & -9 \end{cases}$$

$$B_{=\pm 4} \begin{cases} 6, & \pm 4, & -1 \\ 3, & \pm 4, & -2 \\ 2, & \pm 4, & -3 \\ 1, & \pm 4, & -6 \end{cases}$$

$$B_{=\pm 6} \begin{cases} 1, & \pm 6, & -1. \end{cases}$$

Hienach gibt es 20 reducirte Formen mit positivem  $A$ , ebenso viele Formen existiren mit negativem  $A$ , so dass die Gesamtzahl der reducirten Formen in diesem Falle 40 beträgt und mit der Discriminante zufälliger Weise übereinstimmt.

Unter diesen Formen suchen wir uns die Hauptreducirten erster und zweiter Art aus, d. h. diejenigen Formen, für welche die Ungleichungen bestehen:

$$\left. \begin{array}{l} A + B + C < 0 \\ A + B + C > 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{bez. } A + B + C > 0 \\ A + B + C < 0 \end{array} \right\}$$

Es erweisen sich als Hauptreducirte

1. Art die folgenden 4 Formen:

$$3, -2, -3$$

$$3, -4, -2$$

$$2, -4, -3$$

$$1, -6, -1$$

Ebenso gross ist die Anzahl der Hauptreducirten 2. Art. Sie entstehen offenbar aus denen der ersten Art dadurch, dass wir  $B$  im Vorzeichen umkehren. Demnach sind Hauptreducirte der 2<sup>ten</sup> Art die folgenden 4 Formen:

$$3, +2, -3$$

$$3, +4, -2$$

$$2, +4, -3$$

$$1, +6, -1$$

Die übrigen 32 Formen sind Nebenreducirte. In's Besondere gehört die Hauptform  $(-1, 0, -10)$ , sowie alle Formen mit  $D = 0$  zu den Nebenreducirten. Von den Nebenreducirten werden wir nur beiläufig sprechen.

Wir stellen nun die zusammengehörigen Serien der hauptreducirten Formen auf, indem wir von irgend einer Hauptreducirten 1<sup>ten</sup> Art ausgehen. Sei die Ausgangsform

$$F_1 = 3X^2 - 2Xy - 3y^2.$$

Auf diese Form üben wir die Operation

$$\int \begin{cases} X = x' + y' \\ y = y' \end{cases}$$

so oft aus, bis eine Hauptreducirte der 2<sup>ten</sup> Art entsteht. Es ergibt sich schon beim ersten Male

$$F_2 = 3X^2 + 4Xy - 2y^2.$$

An dieser Form operiren wir mit

$$\int' \begin{cases} X = X' \\ y = X' + y' \end{cases} \dots$$

Dabei entsteht zuerst die Nebenreducirte  $5x^2 - 2y^2$ ; bei nochmaliger Anwendung von  $S'$  aber ergibt sich:

$$F_3 = 3x^2 - 4xy - 2y^2.$$

Jetzt wenden wir wieder  $S$  an und bekommen die Hauptreducirte

$$F_4 = 3x^2 + 2xy - 3y^2.$$

Hieraus entsteht durch die Operation  $S'$

$$F_5 = 2x^2 - 4xy - 3y^2,$$

sodann durch  $S^2$

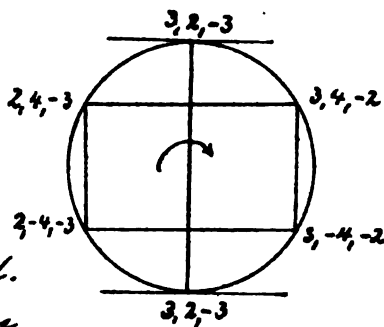
$$F_6 = 2x^2 + 4xy - 3y^2.$$

Operiren wir an  $F_6$  wiederum mit  $S'$ , so erhalten wir schliesslich

$$F_7 = 3x^2 - 2xy - 3y^2 = F_1.$$

In unserm Beispiele treten also 3 Hauptreducirte der 1<sup>ten</sup> Art (und ebenso viele der 2<sup>ten</sup> Art) zu einer ersten Formenserie zusammen. Wir wollen uns die Aufeinanderfolge der Formen

schematisch durch Punkte einer geschlossenen Curve veranschaulichen. Wir erhalten dann in unserem Falle das nebenstehende Bild.



In unserer Formen-

serie gehört eine kleinste Substitution, welche diese Serie in sich transformirt. Diese Substitution können wir, wenn wir von  $\mathcal{F}$  ausgehen, nach dem Vorstehenden symbolisch schreiben:

$$(x, y) = S S^{-1} S S^{-1} S^2 S^{-1} (x', y');$$

ausgerechnet lautet dieselbe

$$x = 25x' + 18y',$$

$$y = 18x' + 13y'.$$

Dieser kleinsten Substitution entspricht eine kleinste Lösung der Pell'schen Gleichung:

$$t^2 - 40u^2 = 4.$$

Dieselbe berechnet sich nach 109.142 aus den Coefficienten unserer Substitution und der Ausgangsform zu

$$t = 38, \quad u = 6.$$

Alle anderen Lösungen der Pell'schen Gleichung müssen sich aus dieser Lösung durch Potenziren ableiten lassen. Der Pell'sche Winkel wird  $i \log(19 + 6\sqrt{10})$ .

Von den 8 Hauptreducirten Formen der Discriminante +40 bleiben nur 2 Formen übrig, welche nicht in unserer ersten Formenserie enthalten sind. Dieselbe müssen sich zu einer 2<sup>ten</sup> Serie zusammenschließen. Wir gehen bei der Berechnung dieser 2<sup>ten</sup> Serie von der Hauptreducirten erster Art

$$F_1 = x^2 - 6xy - y^2$$

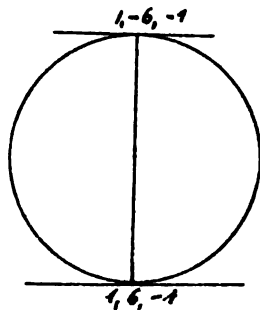
aus. An dieser Form operiren wir mit  $S^\mu$ , wobei wir  $\mu = 1, 2, \dots$  wählen werden, bis wir wieder auf eine Hauptreducirte kommen. Nehmen wir  $\mu = 3$ , so entsteht die Hauptform  $x^2 - 10y^2$ , welche eine Neben-



reducirte ist. Erst für  $\mu = 6$  ergibt sich wieder eine Hauptreducirte u. zw. die noch restirende Form:

$$F_2 = X^2 + 6Xy - y^2,$$

wie es sein muss. Üben wir auf diese successive die Operationen  $S'(\mu)$  aus, so kommen wir für  $\mu = 6$  wieder auf  $F$  zurück. Unsere zweite Formenserie besteht also nur aus 2 Hauptreducirten; übrigens enthält sie dafür um so mehr Nebenreducirte, nämlich 10. Wollen wir uns auch diese Serie schematisch auf einem geschlossenen Curvenzuge veranschaulichen so kommen wir zu der nebenstehenden Figur.



Wir haben nunmehr die sämtlichen 20 re<sub>2</sub>ducirten Formen mit positivem  $K$  auf 2 Klassen untergebracht. In den Formen mit negativem  $K$  konnten wir durch unser bisheriges Verfahren

nicht gelangen, weil wir nur die „regulären“ Substitutionen  $S$  und  $S'$  angewandt haben, welche die  $A$ -Sectoren einzeln in sich transformiren. Um zu erkennen, ob sich die Formen mit negativem  $A$  in dieselben Klassen einordnen, müssen wir diejenigen Substitutionen von der Determinante  $\pm 1$  hinzunehmen, welche die  $A$ -Sectoren vertauschen. Eine einfachste solche Substitutionen ist die uns von früher bekannte Operation:

$$T \begin{cases} x = -y' \\ y = x' \end{cases} .$$

Wenden wir diese auf eine reducirte Form  $Ax^2 + Bx'y + Cy^2$  mit negativem  $A$  (und folglich mit positivem  $B$ ) an, so entsteht eine Form  $Cx^2 - Bx'y + Ay^2$  mit positivem ersten Coefficienten. Die Formen mit negativem ersten Coefficienten sind also je mit einer Form äquivalent, deren erster Coefficient positiv ist. Diese Formen ordnen sich also all,

gemein in die Classen der Formen mit positivem  $A$ , in unserem Falle somit in die beiden vorher gefundenen Classen ein. Es gibt bei der Discriminante 40 nur zwei verschiedene Classen quadratischer Formen.

Bei dieser Gelegenheit bringen wir noch einige Details zur Sprache. Man bezeichnet die Form  $(-A, -B, -C)$  als die zu einer gegebenen Form  $(A, B, C)$  entgegengesetzte Form (*forma opposita*).

Wir fragen uns, wann eine Form mit ihrer entgegengesetzten äquivalent ist.

Zunächst können wir mittelst der Substitution  $F$  die Form  $(-A, -B, -C)$  umsetzen in die äquivalente Form  $(-C, B, -A)$ . Ist  $(A, B, C)$  eine reducirte Form mit positivem ersten Coefficienten, so ist auch  $(-C, B, -A)$  eine ebensolche. Daraus folgt: Soll eine reducirte Form  $(A, B, C)$  mit ihrer entgegengesetzten  $(-A, -B, -C)$  äquivalent sein, so muss  $(-C, B, -A)$

ob ein Gitterpunkt zu einem der natürlichen Umrisspolygone gehört. Dazu ist offenbar zunächst erforderlich, dass die Koordinaten des Gitterpunktes  $x$  und  $y$  keinen gemeinsamen Teiler haben. Als weitere Bedingung teilen wir ohne Beweis die folgende mit: Es wird in den Ecken der Umrisspolygone

$$f(x, y) \leq D/4.$$

Man kann den Minimalwert von  $f$  noch genauer abschätzen. Es zeigt sich nämlich, dass  $f$  mindestens in einer Ecke der Umrisspolygone einen Wert

$$\leq \sqrt{\frac{D}{5}}$$

annimmt. Wegen des Beweises vergleiche man eine interessante Arbeit von Markoff in Math. Annalen Bd. 15 (1879). Es wird interessant sein, die Entwicklungen von Markoff durchweg in das Geometrische zu übersetzen. Ubrigens hängen diese Betrachtungen mit unseren früheren Entwicklungen betreffend das Minimum der Linearformen zusammen,

durch welche wir den Lagrange'schen Satz über Kettenbrüche (vergl. pag. 39) bewiesen.

#### 4. Die Reductionstheorie im elliptischen Falle.

Wir hätten jetzt die entsprechende Theorie wie für die indefiniten auch für die definiten Formen zu entwickeln. Um aber vor Weihnachten zu einem guten Abschluss zu kommen, sei es gestattet, hierbei nur die Resultate anzugeben, Sie finden übrigens alles Wesentliche über definite Formen auch in der Literatur vor.

Sei  $f = ax^2 + bxy + cy^2$  eine definite Form, für welche also  $D = b^2 - 4ac < 0$  ist. Wir setzen  $D = -\Delta$ , so dass  $\Delta$  positiv ist. Die Coefficienten  $a$  und  $c$  haben notwendiger Weise dasselbe Vorzeichen; wir wollen der Bestimmtheit wegen annehmen, dass beide positiv und, dass wir es also mit einer positiven Form  $f$  zu thun

haben. Wir bringen unsere Bemerkungen unter eine Reihe von Punkten.

1. Die geometrische Deutung im Gitter wird, wie wir schon früher sahen, bei den definiten Formen besonders einfach. Man reicht dabei nämlich mit der gewöhnlichen Maassbestimmung aus. Das Fundamentalparallelogramm des zur Form  $f$  gehörigen Gitters hat die Seitenlängen  $\tau_a, \tau_c$  und einen eingeschlossenen Winkel  $\chi$  von der Grösse  $\cos \chi = \frac{b}{2\tau_a \tau_c}$ .

Die Gittertheorie der definiten Formen ist bereits von Dirichlet viel benutzt worden und ausserordentlich klar in Crelle's Bd. 40 auseinandergesetzt worden. Nur bei der Réclaction seiner Vorlesungen ist sie leider fortgelassen worden.

2. Das Gitter, welches wir zu der Form  $f$  hinzuconstruiren, ist zunächst ein Parallelogitter. Denken wir uns aber die Gitterstäbe weg und achten nur noch auf die Gitterpunkte, so bekommen wir ein Punktgitter. Das Punktgitter ist nicht für die einzelne Form  $f$ , sondern für die ganze Klasse der mit  $f$  äquivalenten For-

men charakteristisch.

3. Aus der Formenklasse heben wir eine besonders einfache Form heraus, die wir reduzierte Form nennen. Dieselbe wird folgendermassen definiert. Wir suchen unter allen Gitterpunkten denjenigen auf, welcher von 0 die kleinste Entfernung hat. Die Richtung von 0 nach diesem Punkte wählen wir zur  $x$ -Axe, seine Entfernung von 0 liefert die erste Parallelogrammseite  $\sqrt{A}$ .

Unter allen nicht auf der  $x$ -Axe gelegenen Gitterpunkten suchen wir sodann denjenigen mit der nächstkleinsten Entfernung von 0 heraus. Die Lage dieses Punktes liefert die  $y$ -Axe, seine Entfernung von 0 die Parallelogrammseite  $\sqrt{B}$ .

Die auf dieses Coordinatensystem transformirte gegebene Form nennen wir die zu  $f$  gehörige reduzierte Form; sie lautet

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2.$$

Bei der Bestimmung des reducirten Coordinatensystems können wir sowohl den  $x$ - wie den  $y$ -Vector ebenso gut

nämlich wegen der Begrenzungen, denen die Coefficienten der reducirten Formen unterworfen sind, nur eine endliche Anzahl von solchen Formen. Wir erwähnten bereits, dass  $A$  kleiner als  $\sqrt{\Delta}$  wird. Es gibt also nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werte von  $A$ .

Ferner ist  $B$  kleiner als  $A$  und  $C$  durch  $A$ ,  $B$  und  $\Delta$  mitbestimmt.

Die Anzahl der zu gegebener Discriminante  $\Delta < 100$  gehöriger Klassen kann man ins Besondere aus den oben citirten Cayley'schen Tabellen entnehmen.

2. Man wird auch hier nach den Automorphismen fragen. Was die eigentlichen Automorphismen (welche die Determinante  $+1$  haben) betrifft, so ergeben sich diese wieder aus der Fell'schen Gleichung. Dieselbe lautet jetzt:

$$t^2 + \Delta u^2 = 4.$$

Ihre Theorie wird ungemein einfach. Ist nämlich  $\Delta > 4$  so gibt es nur die eine triviale Lösung  $t = \pm 2$ ,



$u = 0$ . Ausserdem existiren im Falle  $\Delta = 3$  und  $\Delta = 4$ , wo die reducirten Formen

$$x^2 + xy + y^2$$

$$\text{bez. } x^2 + y^2$$

lauten werden, noch einige wenige nicht trivialen Lösungen. Am deutlichsten werden diese Verhältnisse, wenn man an den Pell'schen Winkel  $\Phi$  denkt, welcher jetzt einen gewöhnlichen Winkel bedeutet. Die Automorphie ist dann eine gewöhnliche Drehung des Gitters um 0 durch diesen Winkel, bei welcher das Gitter in sich übergeht. Der Lösung  $t = -2, u = 0$  entspricht der Winkel  $\Phi = \pi$ . Im Allgemeinen geht das Gitter nur bei einer Drehung um  $\pi$  (oder  $2\pi$ ) in sich über, was ja selbstverständlich ist. Für die besonderen Werte  $\Delta = 3$  oder  $\Delta = 4$  dagegen hat der Pell'sche Winkel die Grösse  $\pi/3$  oder  $\pi/4$ . Das Gitter ist dann ein gleichseitiges oder ein quadratisches Gitter, welche ihrer besondern Symmetrie wegen

bereits bei einer Drehung um  $\pi/3$  oder  $\pi/4$  mit sich zur Deckung kommen.

3. Auch die uneigentlichen Automorphismen (von der Determinante  $-1$ ) lassen sich mit einem Worte erledigen. Das Vorhandensein einer uneigentlichen Automorphie bedeutet, daß das Gitter mit sich invers congruent ist, also durch Spiegelung in sich übergeht. Dies findet nur statt bei den rechteckigen und den rhombischen Gittern. Benutzen wir unsere obige Bezeichnung von pg. 162, so können wir sagen: Die einzigen Anordnungsclassen, welche in der Theorie der definiten Formen möglich sind, sind diejenigen mit einem rechteckigen oder rhombischen Punktgitter.

## II. Hauptteil:

### Die Reductionstheorie in ihrer Wirkung auf die Ge- samtheit der binären quadratischen Formen.

Do. d. 10. I. 95. Nachdem wir im ersten Hauptteile die einzelne quadratische Form untersucht und in's Besondere ihre Reduction durchgeführt haben, soll es sich jetzt darum handeln, die Gesamtheit der zu gegebenem  $D$  gehörigen quadratischen Formen zu überblicken und die Stellung der reducirten Formen innerhalb dieser Gesamtheit zu characterisiren.

#### 1. Allgemeiner Ansatz.

Wir recapituliren kurz die Definition der reducirten Formen. Dieselbe ist ver-  
schieden aus, je nachdem  $D < 0$  oder  $D > 0$   
war. Bei negativem  $D$  wurde eine  
Form  $(a, b, c)$  reducirt genannt,

wenn

$$|b| \leq a \leq c$$

war; die Coefficienten  $a$  und  $c$  wurden dabei als positiv vorausgesetzt, indem es genügt, von den positiven definiten Formen zu sprechen. Durch die vorstehenden Ungleichungen war die reducirte Form in eindeutiger Weise festgelegt, wenn wir von gewissen Ausnahmewerten von  $D$  absehen, die wir bald noch eingehender untersuchen werden.

Ist dagegen  $D < 0$ , so sollte eine Form  $(a, b, c)$  reducirt heißen, wenn

$$ac < 0.$$

Hier gab es im Allgemeinen zu einer vorgelegten Form unendlich viele reducirte Formen, die sich nur für comensurable  $a, b, c$  auf eine endliche Zahl reducirten:

Für den Zweck, den wir nunmehr verfolgen: den Zusammenhang der verschiedenen quadratischen Formen zu überblicken: ist die Darstellung der Formen im Litter nicht mehr

bequem, denn es ist nicht leicht, die gegenseitige Lage von unendlich vielen Gittern zu erfassen. Wir wählen jetzt eine ganz andere Art von geometrischer Repräsentation. Wir deuten nämlich einfach die Coefficienten  $a, b, c$ , der Form als gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten im  $\mathbb{R}_3$ , d. h. als Coordinaten eines Punktes.

Wir construiren uns zunächst die Fläche  $b^2 + ac = 0$ , welche einen Kegel darstellt. Ferner markiren wir den Ort der Punkte, für welche  $b^2 + ac = D^2$  ist. Wir erhalten so, indem wir  $D^2$  verschiedene Werte erteilen, eine Schaar von Hyperboloiden, welche alle den genannten Kegel zum Asymptotenkegel haben. Je eines dieser Hyperboloiden stellt die sämtlichen Formen von gleichem  $D^2$  dar. Die Hyperboloiden sind zum Teil einschalige, zum Teil zweischalige. Die einschaligen Hyperboloiden liegen im Inneren des Asymptotenkegels. Dieselben gehören zu positiven Werten

$$\rho a' = a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2$$

$$\rho b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\beta' + \beta\beta') + 2c\beta\beta'$$

$$\rho c' = a\beta'^2 + b\beta\beta' + c\beta'^2.$$

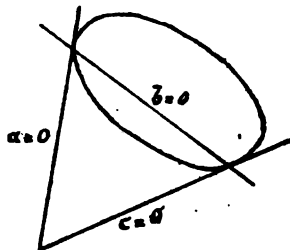
Diese Transformationen stellen jetzt in ihrer Gesamtheit eine Gruppe von projectiven Umformungen der Ebene  $\alpha: \beta: \epsilon$

dar. In der Ebene markieren wir uns den Kegelschnitt  $b^2 - 4ac = 0$ , derselbe bleibt bei den projectiven Transformationen unserer Gruppe ungewändert. Von dem absoluten Werte der Discriminante  $b^2 - 4ac$  kann natürlich keine Rede mehr sein.

Wir kommen so von der affinen Geometrie im  $\mathbb{R}_3$  zu der projectiven im  $\mathbb{R}_2$ . Unsere neue Deutung ist dabei im Grunde nichts anderes, als eine Projection des vorigen räumlichen Bildes, nämlich die Projection vom Coordinatenanfangspunkt des  $\mathbb{R}_3$  aus auf eine irgendwie gestellte Bildebene. Ein ähnliches Verhältnis findet ganz allgemein statt. Man kommt von einer gewöhnlichen Coordinatenbestimmung im  $\mathbb{R}_{n+1}$  zu einer projecti-

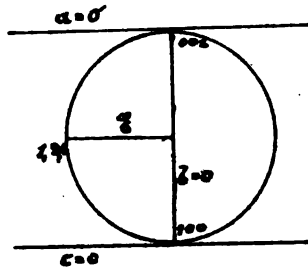
ven im  $R_n$ , indem man jenen auf diesen projiziert.

In unserem Falle hat das Koordinatensystem eine charakteristische Lage gegen den fundamentalen Kegelschnitt  $b^2 - 4ac = 0$ . Es sind nämlich die 2 Seiten  $a=0$ ,  $c=0$  des Koordinatendreiecks Tangenten an den Kegelschnitt, während die dritte  $b=0$  die Berührungsehne jener Tangenten ist. Wir haben den Kegelschnitt nebenstehend als Ellipse gezeichnet. Das ist natürlich völlig willkürlich; denn in der projektiven Geometrie gibt es keinen Unterschied zwischen Ellipse, Hyperbel und Parabel; oder was dasselbe besagt, bei Benutzung projektiver Koordinaten stellt die Gleichung  $b^2 - 4ac = 0$  bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems jeden beliebigen Kegelschnitt dar.



Wir werden die in der Lage des Koordinatensystems zur Verfügung stehende

Willkür dazu benutzen, unsere Figur besonders einfach zu gestalten. Wir wollen zwei Seiten des Coordinatendreiecks ( $a=0$  und  $c=0$ ) parallel und im Abstände 2 zu einander legen und die dritte ( $b=0$ ) rechtwinklich zu ihnen annehmen. Dem alsdann noch völlig willkürlichen Einheitspunkte geben wir den Abstand  $1, \frac{1}{2}, 1$  bez. von  $a=0, b=0, c=0$ . Unser Kegelschnitt geht durch den Punkt  $a:b:c = 1:2:1$  hindurch, zufolge unserer Verfügung über den Einheitspunkt ist dieses ein Punkt, welcher von den drei Coordinatenebenen je den Abstand 1 besitzt. Ausserdem muß der Kegelschnitt die Linien  $a=0$  und  $c=0$  in den Punkten  $0, 0, 1$  bez.  $1, 0, 0$  berühren. Durch diese Bedingungen ist der Kegelschnitt eindeutig bestimmt. Nun genügt aber der in der Figur verzeichnete Kreis vom Radius 1 je.





nen Bedingungen. Hithin wird vermöge unserer besonderen Annahme des Coordinatensystems der fundamentale Kegelschnitt zum Einheitskreise.

Im Ubrigen ist diese Specialisirung des Coordinatensystems ganz unwesentlich und geschieht lediglich aus Bequemlichkeitsrücksichten. Es kann als gute Übung in der projectiven Geometrie empfohlen werden, die folgenden Constructionen bei einer beliebigen Hyperbel durchzuführen.

Wir wollen die Punkte des Kreises durch einen Parameter individualisiren. Zu dem Zweck schreiben wir die Gleichung des Kreises in die Form:

$$\frac{b}{2a} = \frac{2c}{b} = -w$$

oder

$$2a : -b : 2c = 1 : w : w^2,$$

womit die Parameterdarstellung des Kreises geleistet ist.

Wir legen ferner die Tangente an den Kreis im Punkte  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ . Ihre Gleichung ist

$$bb' - 2ac' - 2a'c = 0,$$

wo  $a, b, c$  die laufenden Coordinaten eines Tangentenpunktes sind. Bedeutet  $w$  den zum Berührungspunkte gehörigen Parameter, so können wir die Gleichung der Tangente auch schreiben:

$$aw^2 + bw + c = 0.$$

Hieraus berechnet man

$$w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

als Parameter diejenigen beiden Punkte des Kreises, nach welchen vom Punkte  $a, b, c$  aus Tangenten verlaufen. Davon schliessen sich zwei Bemerkungen an: 1.) Im Innern des Kreises muss  $b^2 - 4ac$  negativ, im Aeusseren positiv sein, denn die von einem innern bez. äusseren Punkte auslaufenden Tangenten sind imaginär bez. reell. Für die quadratischen Formen bedeutet dieses Folgendes: Die definiten Formen finden im Innern des Kreises, die indefiniten ausserhalb des, selben ihre Interpretation. 2.) Setzen

wir  $w = \frac{x}{y}$ , so geht die Gleichung der Tangente über in

$$a x^2 + b x y + c y^2 = 0.$$

Daraus folgt: die beiden Wurzeln von  $\frac{x}{y}$ , welche wir durch Nullsetzen der quadratischen Form erhalten, sind die Parameter  $w$  derjenigen beiden Kreispunkte, in denen die vom Punkte  $a, b, c$  ausgehenden Tangenten den Kreis berühren. Hieraus folgt, dass  $w$  bei der auf pg. 178 gegebenen Collineation einerseits die lineare Substitution  $w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$  erfährt, Collineation und Substitution sind wechselseitig eindeutig aneinander gebunden.

## 2. Die definiten quadratischen Formen und die Punkte im Innern des Kegelschnittes.

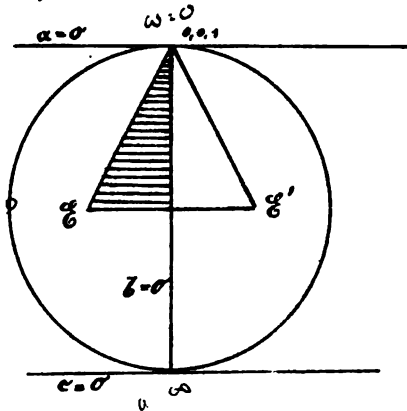
Wir wenden uns nun speciell zu den definiten Formen, studiren also das Innere des Kreises. Hiergrenzen

wir uns zunächst den Raum für die reducirten Formen ab. Nehmen wir in den die reducirten Formen definirenden Bedingungen

$$|b| \leq a \leq c$$

die Gleichheitszeichen, so erhalten wir die Begrenzung des gesuchten Raumes. Dieselbe wird gebildet von den Geraden  $b = a$ ,  $b = -a$  und  $a = 0$ . Die Gerade  $b = a$  ist die Verbindungs-

linie des Punktes  $0, 0, 1$  mit dem Einheitspunkte  $\mathcal{E}$ , fer-  
ner ist  $b = -a$  die  
Verbindungsli-  
nie des Punktes  $\omega = 1$   
 $0, 0, 1$  mit dem  
in Bezug auf  
 $b = 0$  zu dem Punk-  
te  $\mathcal{E}$  symmetrisch  
gelegenen Punkte  $\mathcal{E}'$ . Endlich ist  $a = 0$



die Gerade  $\mathcal{E} \mathcal{E}'$ . Das von diesen drei Geraden eingeschlossene Dreieck bildet den „reducirten Raum“ für die definiten Formen. Dies Dreieck wird

noch durch die Gerade  $b \cdot o$  in zwei Teildreiecke zerlegt, von denen wir das eine schraffirt, das andere nicht schraffirt haben, wir nennen das einzelne dieser beiden Dreiecke ein „Fundamentaldreieck“

Nun gibt es, wie wir wissen, zu jeder definiten quadratischen Form eine und im Allgemeinen auch nur eine reduzirte Form, welche mit ihr *a*equivalent ist. Mit anderen Worten: Es ist möglich einen jeden Punkt des Kreisinnern durch eine der  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  Collineationen in einen und im Allgemeinen auch nur in einen Punkt des reducirten Raumes hineinzu bringen. Wenden wir umgekehrt alle die unendlich vielen Collineationen  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  auf den reducirten Raum an, so erhalten wir eine unendliche Anzahl von weiteren Dreiecken. Dieselben müssen nach dem eben Gesagten das Innere des Kreises lückenlos und einfach überdecken.

Frei. d. 10. I. Die so entstehende Figur

hat in der vorliegenden Theorie und im Anschlusse daran z. B. auch in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen eine fundamentale Bedeutung. Um die Figur vollständig zu entwickeln, lösen wir erst eine etwas andere Aufgabe, nämlich wir construiren auf der Peripherie des Kreises eine Scala der in dem Parameter  $w$  rationalen Punkte. Dabei gehen wir von den drei Punkten  $w=0, \infty, 1$  aus. In unserer Kreisfigur sind dieses bez. die Punkte mit den homogenen Coordinaten  $0, 0, 1; 1, 0, 0; 1, -2, 1$ , d. h. drei Punkte in sehr spezieller Lage. Wir können aber ebenso gut von drei beliebigen Punkten auf einem beliebigen Kegelschnitt ausgehen, diesen Punkten die Parameter  $0, \infty, 1$  beilegen, und nach denjenigen Punkten fragen, welche in Bezug auf sie rational sind. In der That brauchen wir nur zwei der gegebenen Punkte heranzugreifen und in diesen die Tangenten an den gegebenen Kegelschnitt zu legen. Dann liefern uns diese Tangenten zusammen mit der Berührungsehne

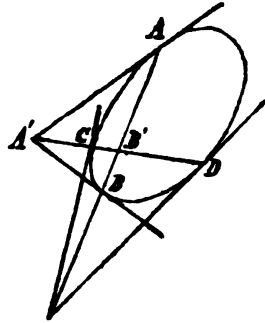
ein Koordinatendreieck, in Bezug auf welches der Kegelschnitt die Gleichung  $b^2 - 4ac = 0$  annimmt. Bestimmen wir jetzt den Parameter  $w$  so, wie es oben geschehen, so erhalten die zwei auf dem Kegelschnitt gelegenen Ecken des Koordinatendreiecks die Parameter  $w = 0$  und  $w = \infty$ . Durch passende Wahl des Einheitspunktes können wir dann noch erreichen, daß der dritte der gegebenen Punkte den Parameter  $w = 1$  erhält. Indem wir in solcher Weise von einem allgemeinen Kegelschnitt und drei beliebigen Punkten  $A, B, C$  auf ihm ausgehen, haben wir den Vorteil, daß die projective Bedeutung der jetzt zu beschreibenden Constructionen klarer wird, wie wenn wir an unserer speciellen Figur operiren würden.

Bei allen Constructionen der projectiven Geometrie ist der fundamentale Process dieser: zu 3 gegebenen Elementen  $A, B, C$  das 4<sup>te</sup> harmonische  $D$  zu construiren. Sind

die Elemente  $A, B, C$  Punkte einer Geraden oder Strahlen eines Büschels, so ist die Construction des 4<sup>ten</sup> harmonischen vollauf bekannt. Liegen aber die Punkte  $A, B, C$  wie hier auf einem Kegelschnitt, so müssen wir zuerst definiren, wann vier Punkte eines Kegelschnitts harmonisch nennen wollen. Diese Definition stützt sich auf den Satz, daß das Doppelverhältnis von 4 Strahlen, welche irgend 4 Punkte des Kegelschnitts von einem 5<sup>ten</sup> Punkte des Kegelschnitts aus projectiren, unabhängig ist von der Lage dieses Punktes. Man bezeichnet allgemein als Doppelverhältnis von vier Punkten des Kegelschnitts eben das Doppelverhältnis von vier solchen projectirenden Strahlen. Hiernach können wir entscheiden, wann vier Punkte  $A, B, C, D$  auf dem Kegelschnitt harmonisch liegen, d. h. wann das Doppelverhältnis der projectirenden Strahlen gleich - 1 ist. Wir behaupten: Die Punkte liegen harmonisch, wenn die Verbindungslinien  $AD$  und



CD conjugirte Polaren  
sind. In diesem Falle  
 ist nämlich  $A'$  (vergl.  
 die Figur), der Pol  
 von  $AB$  auf  $CD$ .  
 Projiciren wir nun die  
 Punkte  $A, B, C, D$  spe-  
 ciell von  $A$  aus, so  
 ergeben sich als pro-  
 jicirenden Strahlen die Geraden  $AC, AD,$   
 $AA', AB'$ . Dieselben sind harmonisch,  
 weil es ihre Schnittpunkte  $C, D, A', B'$   
 mit der Geraden  $CD$  nach Voraus-  
 setzung sind. Also liegen auch die  
 Punkte  $A, B, C, D$  harmonisch, w.z.  
 b. w.



Hiernach stellt sich die Construction  
 des zu  $A, B, C$  gehörigen vierten har-  
 monischen Punktes  $D$  folgendermaßen.  
 Wir construiren den Pol  $A'$  zu der  
 Geraden  $AB$  und verbinden  $A'$   
 mit  $C$ . Der zweite Schnittpunkt  
 der Geraden  $A'C$  mit dem Kegel-  
 schnitt ist der gesuchte Punkt  $D$ .

Daneben stellen wir das analytische

Kriterium für die harmonische Lage.

Eine Gerade, welche die Punkte  $a = 0, b = 0$  und  $a = a', b = b'$  verbindet, hat die Gleichung

$$ab' - ba' = 0.$$

Ist  $a', b'$  ein Punkt des Kegelschnittes mit dem Parameter  $w$ , so wird zufolge der Einführung des Parameters  $w$   $a' : -b' = 1 : 2w$ . Hithin lauten die Gleichungen derjenigen vier Strahlen, welche die Punkte  $w_1, w_2, w_3, w_4$  mit der auf dem Kegelschnitt gelegenen Coordinatenecke  $a = 0, b = 0$  verbinden:

$$b + 2w_1 a = 0$$

$$b + 2w_2 a = 0$$

$$b + 2w_3 a = 0$$

$$b + 2w_4 a = 0.$$

Das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen hat bekanntlich den Wert

$$\lambda = \frac{w_1 - w_4}{w_1 - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_4}.$$

Setzen wir noch homogen machend

$$w_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad w_2 = \frac{x_2}{y_2},$$

191.

so können wir unter Einführung von zwei neuen Parametern  $\mu$  und  $\nu$  schreiben

$$\omega_3 = \frac{x_1 + \mu x_2}{y_1 + \mu y_2}, \quad \omega_4 = \frac{x_1 + \nu x_2}{y_1 + \nu y_2}$$

Dann findet man durch einfache Umrechnung

$$\lambda = \frac{\mu}{\nu}$$

Soll also  $\lambda = -1$  werden, so muss  $\nu = -\mu$  sein. Hiernach können wir das analytische Kriterium für die harmonische Lage folgendermassen formulieren:  
Sind 3 Punkte des Kegelschnittes mit den Parametern

$$\omega_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad \omega_2 = \frac{x_2}{y_2}, \quad \omega_3 = \frac{x_1 + \mu x_2}{y_1 + \mu y_2}$$

gegeben, so ist der zugehörige vierte harmonische Punkt der folgende:

$$\omega_4 = \frac{x_1 - \mu x_2}{y_1 - \mu y_2}$$

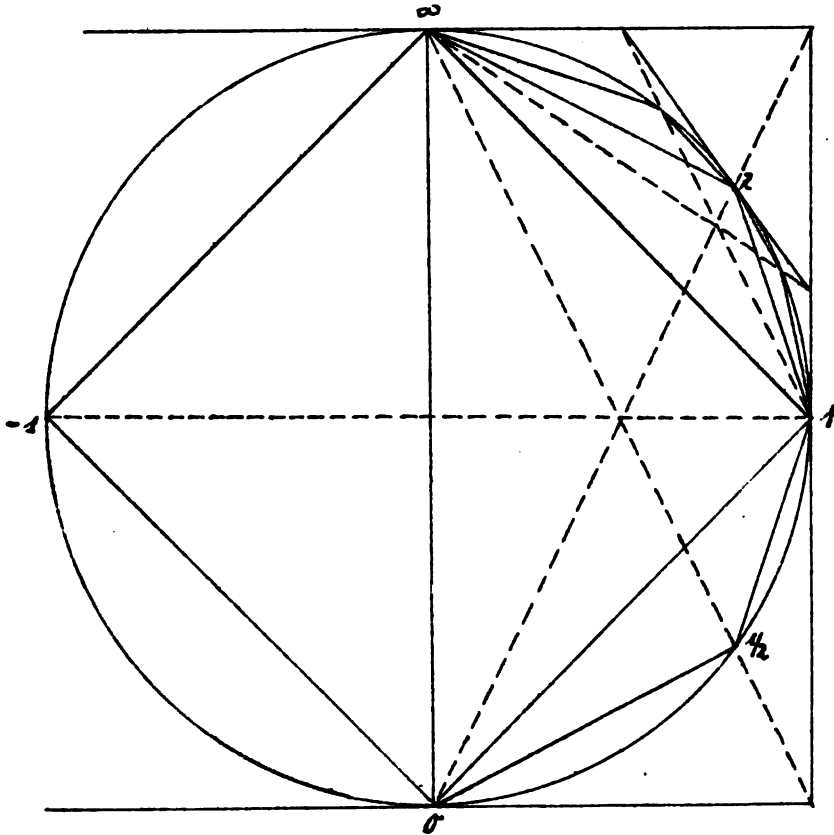
Es ist klar, dass wenn wir von rationalen Punkten  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  ausgehen, wie durch unsere Construction und die parallel laufende Rechnung

immer wieder zu rationalen Punkten geführt werden. -

Wir gehen nun auf unsere spezielle Kreisfigur zurück und construiren zu den Punkten  $0, 1, \infty$  auf alle Weisen den vierten harmonischen Punkt, indem wir unsere Construction auf den vorliegenden Fall specialisiren. Wir suchen also die Pole bez. zu den Geraden  $0, 1; 1, \infty; \infty, 0$  auf und verbinden diese bez. mit den Punkten  $\infty, 0, 1$ . Die zweiten Schnittpunkte der Verbindungslinien mit dem Kreise liefern uns die drei 4<sup>ten</sup> harmonischen Punkte, welche bei veränderter Reihenfolge der Punkte  $0, 1, \infty$  möglich sind. Diese drei Verbindungsgeraden - wir können sie die „Hilfsgeraden“ nennen - schneiden sich, wie man sieht in einem Punkte. Es folgt dieses aus dem Pascal'schen Satze, nach welchem sich bekanntlich in jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Sechsecke die 3 Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkte treffen.

193.

fen. Lässt man nämlich das allgemeine Sechseck in die drei doppelt zu zählenden Tangenten in den Punkten  $0, 1, \infty$  ausarten, so gehen die drei Verbindungslinien, von welchen der Brianchon'sche Satz spricht, in unsere drei Hülfsgeraden über. Den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Hülfsgeraden können wir etwa als den „Mittelpunkt“ des Dreiecks  $0, 1, \infty$  bezeichnen. Analytisch sind die drei



neuen auf der Kreisperipherie construirten Punkte nach der soeben abgeleiteten Formel für das Doppelverhältniß durch die Parameter  $\frac{1}{2}, 2, -1$  bestimmt.

In unserem Ausgangsdreiecke  $\infty$  haben wir durch diese Construction 3 neue Dreiecke hinzugezeichnet, nämlich die Dreiecke  $\infty, 2, 1; -1, \frac{1}{2}, 0; 0, -1, \infty$ . Jetzt wiederholen wir dieselbe Construction mit jedem dieser neuen Dreiecke. Wir finden dann je zwei neue Punkte des Kreises und dementsprechend je zwei neue Dreiecke. Indem wir so fortfahren, bilden wir einen geometrischen Algorithmus aus, durch welchen wir successive das ganze Innere des Kreises mit Dreiecken und die ganze Peripherie mit Punkten erfüllen, (welche dieselbe ersichtlich überall dicht bedecken). Jedes Dreieck ist dabei durch seine 3 Hilfsgeraden, die sich in seinem „Mittelpunkte“ kreuzen, in sechs Unterdreiecke zerlegt. Die Frage wird sein, welche  $\omega$  Werthe

den construirten Dreiecksecken zugehö-  
ren, überhaupt wie sich unser geome-  
trischer Process im analytischen Ge-  
wande darstellt.

Do. d. 16. I. 96. Hierbei können wir uns  
auf denjenigen Teil der Figur beschrän-  
ken, welcher rechts von der Geraden  
 $o \infty$  liegt und welcher die Punkte mit  
positivem Parameter  $w$  enthält. Die  
Verteilung des Parameters in der lin-  
ken Hälfte der Figur ist nämlich eine  
ganz analoge: hier befinden sich  
die Punkte mit negativem  $w$ , wobei  
der Punkt  $-w$  aus dem Punkte  $+w$   
durch eine Umklappung um die Ge-  
rade  $o \infty$  hervorgeht.

Wir fragen also nach dem arithmetischen  
Character derjenigen positiven  $w$ -Werte,  
welche zu den bei unserer Construction  
successive erreichten Dreiecken gehören.  
Zunächst ist klar, dass alle diese Werte ra-  
tionale Zahlen sind; denn einerseits sind  
es die Ausgangswerte  $0, \infty, 1$ , anderer-  
seits ist die Construction des vierten har-  
monischen Punktes eine rationale Op<sub>2</sub>.

ration. Wir schreiben daher die Parameter in die Form  $\frac{a}{b}$ , wobei wir die Spaltung des  $w$  in Zähler und Nenner allemal so vornehmen, dass diese positiv sind und keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Für die Punkte  $w = 0$  und  $w = \infty$ , wo diese Spaltung unbestimmt wird, setzen wir die Zerlegungen  $\frac{0}{1}$  und  $\frac{1}{0}$  fest.

Es seien nun  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  die beiden Eckpunkte einer Seite irgend eines unserer Constructionsdreiecke, wobei  $\frac{a}{b}$  derjenige der beiden Eckpunkte sein möge, welcher den größeren Parameter besitzt, so dass  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ . Gehen wir in der Construction einen Schritt weiter, so legt sich an die genannte Dreiecksseite ein neues Dreieck an, welches einen neuen rationalen Punkt unserer Scala liefert. Wir behaupten dann:

1.) Für die beiden Eckpunkte  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  gilt die Relation

$$\underline{a \cdot d - b \cdot c = 1}$$

2.) Der Parameter der dritten Ecke des neuen Dreiecks berechnet sich aus den Parametern  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  der beiden



anderen Ecken nach der Formel:

$$w = \frac{a+c}{b+d}$$

Diese Behauptungen beweisen wir durch vollständige Induction. Was zunächst die Ausgangspunkte  $\frac{a}{b} = \frac{1}{0}$  und  $\frac{c}{d} = \frac{0}{1}$  betrifft, so genügen diese der Relation 1); auch hat der durch unsere Construction zunächst gelieferte Punkt  $\Omega$  die sub 2) angegebene Form  $w = \frac{1+0}{0+1}$ . Inwessen war die Benennung dieser drei Punkte doch nur eine conventionelle; sie ergab sich nicht als notwendige Folge aus unserer Construction. Um daher die Richtigkeit unserer Angaben für den ersten Schritt des Verfahrens darzuthun, gehen wir auf die Dreiecksseite  $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$ ,  $\frac{c}{d} = \frac{0}{1}$  ein und betrachten ausserdem den Punkt  $w = \frac{1}{2}$ . Für diese bestehen die Behauptungen 1) und 2) ersichtlich gleichfalls zu recht. Wir nehmen nun an, dass wir durch eine beliebige Anzahl von Constructions zu einem Dreiecke gelangt sind, dessen Eckpunkte,

den angegebenen Regeln entsprechend die Parameter haben:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d} \text{ mit } ad - bc = 1.$$

An dieses Dreieck setzen sich durch eine abermalige Wiederholung unserer Construction zwei neue Dreiecke an. Wir betrachten dasjenige Dreieck, welches mit dem vorhergehenden die Seite  $\frac{a+c}{b+d}$  bis  $\frac{c}{d}$  gemein hat. Die Frage wird sein, ob auch die Ecken dieses Dreiecks den angegebenen Regeln genügen. Zwei seiner Ecken sind uns bekannt; es sind dieses die Punkte  $\frac{a+c}{b+d}$  und  $\frac{c}{d}$ . Wir bezeichnen dieselben jetzt kürzer mit  $\frac{a'}{b'}$  bez.  $\frac{c'}{d'}$  und bemerken, daß wir danach statt  $\frac{a}{b}$  auch schreiben können:  $\frac{a'-c'}{b'-d'}$ .

Es ist nun erstlich

$a'd' - b'c' = (a+c)d - (b+d)c = ad - bc = 1$ ,  
so daß die Behauptung 1) auch für das neue Dreieck richtig ist. Die dritte Ecke des in Rede stehenden Dreiecks ist unserer Construction zufolge als vierter harmonischer Punkt zu den Ecken

$$\frac{a'}{b'}, \frac{c'}{d'} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{a' - c'}{b' - d'}$$

bestimmt. Nach pg. 191 hat dieser vierte harmonische Punkt daher den Parameter

$$\frac{a' + c'}{b' + d'}$$

Damit ist auch die Richtigkeit unserer Behauptung 2) für das neue Dreieck bewiesen. Hithin gelten unsere obigen Regeln überhaupt für jedes Dreieck, welches durch beliebige Wiederholung unserer Construction erreicht wird.

Den Kernpunkt dieses Beweises erblicken wir darin, daß nach Verabredung die Spaltung der Parameterwerte in einen Zähler und Nenner ohne gemeinschaftlichen Teiler erfolgte. Hierauf stützten wir uns wesentlich im Vorstehenden, indem wir aus der Gleichung  $\frac{a'}{b'} = \frac{a+c}{b+d}$  folgten:

$$a' - a = c, \quad b' - b = d.$$

Wir betrachten einmal die ganze Reihe der nach einer gewissen Anzahl von Constructions erreichten positiven Parameterwerte. Sie möge aus den

folgenden Brüchen bestehen:

$$\frac{1}{0}, \dots, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \dots, \frac{1}{0}.$$

Diese Reihe liefert uns die bis zu einem gewissen Grade der Dichtigkeit gediehene Scala unserer rationalen Punkte. Dabei gilt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Worten der Reihe die Relation  $ad - bc = 1$ . Wollen wir die Scala weiter vervollständigen, so haben wir die Werte  $\frac{a+c}{b+d}$  zwischenzuschalten. Mit Reihen dieser Art beschäftigt sich Hurwitz im 44ten Bande der Mathem. Annalen (1894). Er nennt dieselben Farey'sche Reihen (nach dem englischen Mathematiker Farey, welcher von der Theorie der musikalischen Intervalle ausgehend auf diese Reihen geführt wurde).

Wir fragen nun weiter, welche rationalen Zahlen  $\frac{a}{b}$  bei unserer Construction als Dreiecksseiten auftreten. Die Antwort hierauf lautet einfach folgendermassen: Unser Process liefert successive alle rationa-

len Zahlen  $\frac{a}{b}$  und alle rationalen Zahlenpaare  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  von der Determinante  $ad - bc = 1$ . Den Beweis hierfür knüpfen wir an die uns bekannten Sätze über Kettenbruchentwicklung an. In dem wir eine rationale Zahl  $\frac{a}{b}$  in einen Kettenbruch entwickeln, construieren wir eine Reihe von Näherungsbrüchen  $\frac{p_r}{q_r}$ , zwischen welchen die Recursionsformeln bestehen.

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{a_r p_{r-1} + p_{r-2}}{a_r q_{r-1} + q_{r-2}} .$$

Ausser diesen, den sog. Hauptnäherungsbrüchen, betrachten wir die Nebennäherungsbrüche, welche durch die Formel gegeben waren

$$\frac{\rho p_{r-1} + p_{r-2}}{\rho q_{r-1} + q_{r-2}} \quad \rho = 1, 2, \dots, (a_r - 1).$$

Die Reihe der Näherungsbrüche begann mit den fingirten Brüchen

$$\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{0}{1}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{0} .$$

Die Gesamtheit dieser Brüche können wir in das folgende Schema anordnen:

$$\begin{array}{r}
 \frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{\alpha}{1} \\
 \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{\sigma} \\
 \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_1}{1} \\
 \frac{p_2}{q_2} = \mu_2 + \frac{1}{\mu_2} \\
 \vdots \\
 \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha}{\beta}
 \end{array}$$

Dabei berechnet sich jeder Näherungsbruch aus zwei anderen Näherungsbrüchen vermöge der oben angegebenen Recursionsformeln in der Weise, dass Zähler und Nenner jenes gleich der Summe in Zähler und Nenner dieser wird. Drei in solcher Weise zusammengehörige Brüche

sind in unserem Schema durch Verbindungslinien gekennzeichnet; sie erscheinen hier als Ecken eines Dreiecks. Andererseits schreiten wir bei der Construction der rationalen Punkte auf der Kreisperipherie von einem Dreieck zu einem nächsten fort, wobei die Ecken eines jeden dieser Dreiecke ebenfalls nach dem gerade genannten Gesetze zusammengehören. Die sämtlichen Dreiecke unseres Schemas sind daher im Sinne unserer Construction „Farey'sche Dreiecke“ und die sämtlichen Wahlen unseres Schemas bezeichnen Punkte der Kreisperipherie, welche für unsere Construction erreichbar sind. Ins Besondere ist  $\frac{a}{b}$  ein solcher Punkt. Nun ist aber  $\frac{a}{b}$  eine ganz beliebige rationale Wahl, weil doch eine beliebige rationale Wahl in einen Kettenbruch entwickelt werden kann. Hiedin ist jeder in  $w$  rationale Punkt der Kreisperipherie für unsere Construction erreichbar. Hiermit ist

der erste Teil unserer obigen Aussage bewiesen. Es hat sich nebenbei die interessante Thatsache ergeben, dass die Reihe der Hülfpunkte, welche wir bei unserer Construction berühren müssen, um zu dem vorgelegten rationalen Werte von  $w$  zu gelangen, übereinstimmt mit den Näherungsbrüchen in der Kettenbruchentwicklung dieses Wertes.

Die in unserem Schema verlaufenden Verbindungslinien deuten noch eine andere Eigenschaft der Näherungsbrüche, nämlich den Determinantensatz der Kettenbruchentwicklung, an. Es haben nämlich je zwei Näherungsbrüche  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  die Determinante  $a \cdot d - bc = +1$ , wenn  $\frac{a}{b}$  an dem unteren,  $\frac{c}{d}$  an dem oberen Ende einer Verbindungslinie steht. Umgekehrt wird jede Lösung  $c, d$  der Diophantischen Gleichung  $a \cdot d - bc = 1$ , in welcher wir uns  $a$  und  $b$  irgendwie teilerfremd gegeben denken, wie wir früher



zeigten durch einen Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von  $\frac{a}{b}$  geliefert. Die beiden Nahlen  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  erscheinen daher in unserem Schema als Endpunkte einer Verbindungslinie. Alle Verbindungslinien unseres Schemas ergeben aber bei der Construction am Kreise Dreieckseiten. Daher muß jedes Nahlenpaar  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$ , welches der Diophantischen Gleichung  $ad - bc = 1$  genügt, in unserer Construction als Begrenzung einer Dreieckseite auftreten. Hiermit ist auch der zweite Teil unserer obigen Behauptung erwiesen.

Wir führen noch im Anschluss an Hurwitz eine bequeme Bezeichnung ein. Wir nennen die Verbindungslinie zweier Punkte  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  der Kreisperipherie, wenn sie der Gleichung  $ad - bc = +1$  genügen, eine Elementarsehne erster Art.

Das zuletzt Bewiesene können wir hiernach so ausdrücken: Die Gesamtheit der Elementarsehnen

erster Art des Kreises fällt mit der Gesamtheit der Dreiecksseiten bei unserer Construction zusammen. Wir bezeichnen ferner als Elementarschnitte zweiter Art die Verbindungslinie zweier Punkte  $\frac{a'}{c'}$  und  $\frac{c'}{a'}$  des Kreises von der Determinante  $a'd'-b'c'$ . Es zeigt sich, dass die Hilfsgeraden unserer Construction solche Elementarschnitte zweiter Art sind, und dass wieder die Gesamtheit der Elementarschnitte zweiter Art mit der Gesamtheit der Hilfsgeraden zusammen fällt.

Str. 17. I. 96. Wir bringen heute an unserer bisherigen Figur noch einen scheinbar äusserlichen Zusatz an; wir werden dadurch erreichen, dass uns dieselbe ausser der Scala der rationalen Punkte auch die Einteilung des Kreisinneren in eine unendliche Anzahl unter sich äquivalenter Parzellen zur Erscheinung bringt.

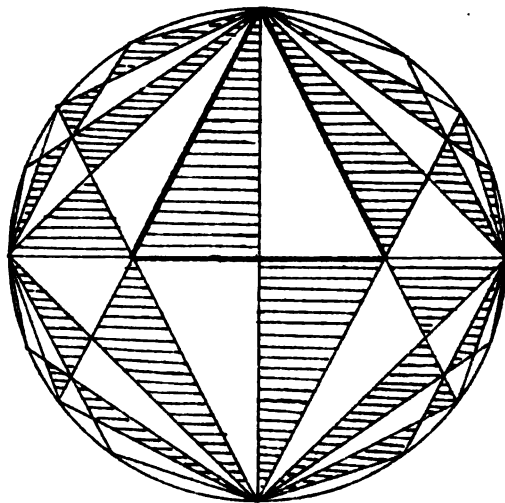
Wir bemerken nämlich, dass jedes unserer Constructionsdreiecke durch

die Hilfsgeraden in 6 Unterdreiecke geteilt wird. Diese Unterdreiecke wollen wir abwechselnd schraffiren, so daß sich jedes schraffierte Dreieck mit seinen 3 Seiten an 3 nichtschraffierte Dreiecke anlegt und umgekehrt. Es stossen dann in den „Mittelpunkten“ der Constructionsdreiecke je 3 schraffierte Dreiecke zusammen, in den „Mittelpunkten“ der Seiten jener Dreiecke (wenn wir so diejenigen Punkte jener Seiten bezeichnen, in welchen dieselben von den durch den gegenüberliegenden Eckpunkt gehenden Hilfsgeraden geschnitten werden) je zwei und in den Ecken der Constructionsdreiecke je unendlich viele schraffierte Dreiecke zusammen. In's Besondere liefern ein gewisses schraffirtes und ein gewisses nichtschraffirtes Dreieck zusammen gerade das pg. 184 abgegrenzte reducirte Gebiet, vergl. überall die Figur der folgenden Seite.

Es ist nun möglich, jedes schraffierte bez. nicht schraffierte Dreieck unserer

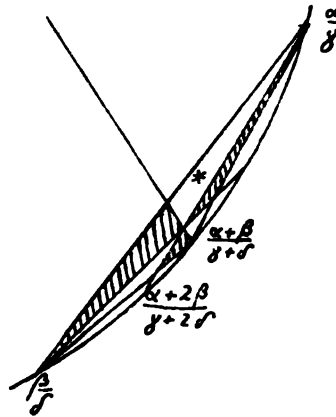
Figur durch eine und nur durch eine Sub-  
stitution ( $\alpha \beta$ ) in den schraffirten bez.  
nicht schraffirten Teil des reducirten Rau-  
mes zu transformiren. Und umgekehrt  
gibt es zu jeder solchen Substitution  
ein und auch nur ein schraffirtes und  
nicht schraffirtes Dreieck unserer Fi-  
gur, welches durch jene Substitution  
in den reducirten Raum verlegt  
wird.

Zum Beweise  
 greifen wir  
 irgend ein  
 Dreieck un-  
 serer Figur  
 heraus. Das-  
 selbe ist ein  
 Unterbestand-  
 teil eines der  
 Construction-  
 dreiecke, eine  
 Seite dessel-



ben fällt in eine Seite dieses Dreiecks,  
 also in eine Elementarsehne erster Art,  
 während seine beiden anderen Seiten

Stücke von Hilfsgeraden, also von Elementar-sehnen zweiter Art sind. Es handle sich etwa um das mit einem \* versehene nicht schraffierte Dreieck. (vergl. die f. Figur). Die Endpunkte der zum Dreiecke gehörigen Elementar-sehne erster Art seien  $\frac{\alpha}{\gamma}$  und  $\frac{\beta}{\delta}$ . Die Endpunkte der beiden Elementar-sehnen zweiter Art sind dann:  $\frac{\alpha}{\gamma}$  und  $\frac{\alpha+2\beta}{\beta+2\gamma}$  bez.  $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$  und  $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ . Andererseits ist der nichtschraffierte Teil des reduzierten Raumes von der Elementar-sehne erster Art  $\infty, 0$  und den Elementar-sehnen zweiter Art  $\infty, \frac{1}{2}$  und  $1, -1$  begrenzt. Wir betrachten daher die folgenden Punktepaare samt den sie verbindenden Geraden:



$$\begin{array}{l} \text{einer,} \\ \text{seits} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\alpha+2\beta}{\gamma+2\delta} \\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}, \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} \end{array} \right. \text{andera,} \left\{ \begin{array}{l} \infty, 0 \\ \infty, \frac{1}{2} \\ +1, -1 \end{array} \right. \text{seits}$$

Wir können nun unmittelbar eine lineare Transformation angeben, welche die Punkte der ersten Serie in die daneben stehenden Punkte der zweiten Serie überführt. Wir haben nämlich, wenn  $w$  irgend einen der ersteren,  $w'$  irgend einen der letzteren Punkte bedeutet.

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}.$$

Aber mit dieser Substitution, resp. der durch sie gegebenen Vertauschung der Kegelschnittpunkte ist nach pg. 183 eine Collineation der ganzen Ebene, die den Kegelschnitt in sich überführt, notwendig verbunden, nämlich die Collineation

$$\begin{aligned} \S a' &= \alpha^2 \cdot a + 2\gamma \cdot b + \gamma^2 \cdot c, \\ \S b' &= 2\alpha\beta \cdot a + (\alpha\delta + \beta\gamma) \cdot b + 2\gamma\delta \cdot c, \\ \S c' &= \beta^2 \cdot a + \beta\delta \cdot b + \delta^2 \cdot c. \end{aligned}$$

Diese führt die Verbindungslinie von  $\frac{\alpha}{\gamma}$  und  $\frac{\beta}{\delta}$  in die Verbindungslinie von  $\infty$  und  $0$  etc., d. h. unser nicht-schraffirtes Dreieck in die nicht schraffirte Hälfte des reducirten Raumes über. Da aber jenes Dreieck ein ganz beliebiges Dreieck unserer Construction darstellt, so erhalten wir das Resultat: dass jedes beliebige (schraffirt oder nicht-schraffirt) Dreieck in das (schraffirt oder nicht-schraffirt) Dreieck des reducirten Raumes durch eine Collineation unserer Gruppe verwandelt werden kann. Diese Collineation ist auch eindeutig bestimmt, wie aus den hingeschriebenen Formeln hervorgeht.

Andererseits wird jede Collineation unserer Gruppe, bez. jede  $w$ -Substitution

$$w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$$

ein Dreieck unserer Einteilung in das entsprechende Dreieck des reducirten Gebietes (nach dem Schema von pg 210 oben) überführen. Es werden

also auch alle Substitutionen der Gruppe dadurch erschöpft, dass wir verlangen, alle Dreiecke der Figur in das reducirte Gebiet zu verlegen.

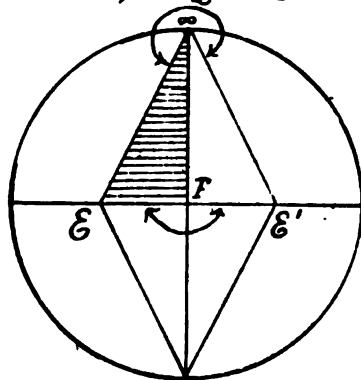
Wenden wir umgekehrt auf das reducirte Gebiet die Gesamtheit unserer Collimationen an, so müssen wir die Gesamtheit unserer Dreiecke erhalten. Durch diese Bemerkungen ist die Berechtigung der Benennung: reducirtes Gebiet: auf's neue dargethan. Wir erkennen nämlich:

Es ist jeder Punkt des Kegelschnitts, wenn einem bestimmten Punkte des reducirten Gebietes äquivalent und umgekehrt sind keine zwei Punkte des reducirten Gebietes unter sich äquivalent. Die Punkte des reducirten Dreiecks stellen also alle reducirten Formen mit  $D' < 0$  und jede nur einmal vor. Dieselbe Aussage können wir auch so formuliren: Das reducirte Gebiet bildet für das Kegelschnitt innere einen Fundamentalbereich der Gruppe unserer  $(\alpha, \beta)$  Substi-



tutionen.

Die letzten Aussagen verlangen, wenn sie vollständig richtig sein sollen, noch eine schärfere Abgrenzung des reducirten Gebietes. Wir bemerken nämlich, dass unser reducirtes Gebiet, wie wir es bisher definiert haben, d. h. das Dreieck  $\infty, E, E'$  schlechthin, gewisse Punkte, nämlich die Randpunkte enthält, welche unter sich äquivalent sind. Es entspricht dies bei unserer vorhergehenden Deduction dem Umstande, dass wir diese Randpunkte entweder dem reducirten Bereiche selbst <sup>oder</sup> einem seiner Nachbarbereiche zurechnen können. Wir betrachten die projective Beziehung  $w' = w + 1$  der Kreisperipherie in sich; dieselbe führt die Punkte  $\infty, -\frac{1}{2}$  des Kreises in die Punkte  $\infty, +\frac{1}{2}$  über. Die Dazugehörige Collocation der Ebene bringt also die Seite  $\infty E$  unseres Dreiecks in die Seite  $\infty E'$ . Die Substitution



$w^{-1}$  bewirkt das Umgekehrte. Wir betrachten ferner die Substitution  $w' = -\frac{1}{w}$ , welche gleichfalls eine  $(\alpha\beta)$  Substitution ist. Dieselbe macht aus den Punkten  $-1, +1$  des Kreises die Punkte  $+1, -1$ ; sie führt also die Seite  $EC'$  unseres Dreiecks in sich über u. zw. in der Weise, dass die eine Hälfte  $F'E$  derselben in die andere Hälfte  $F'E'$  übergeht und umgekehrt. Die Randpunkte des Dreiecks sind also paarweise durch gewisse  $(\alpha\beta)$  Collineationen einander zugeordnet, sie sind paarweise äquivalent.

Wir deuten dieses in der Figur durch die Doppel Pfeile an. Soll unser reducirtes Dreieck im präcisen Sinne des Wortes ein Fundamentalraum sein, d. h. soll es nur nicht-äquivalente Punkte enthalten, so dürfen wir demselben nur den einen Teil des Randes, etwa den zum schraffirten Dreieck gehörigen Rand hinzurechnen, während wir den anderen Teil des Randes den Nachbardreiecken zuweisen. Nach dieser Veranschäuflichung ist jetzt der Satz ausnahmslos richtig:

dass jeder Punkt des Kreisinnern einen und nur einen äquivalenten Punkt im Fundamentalbaum besitzt.

Wir werden dieselbe Verschärfung auch an der arithmetischen Definition der reducirten Formen anzubringen haben. Wir nennen eine definite Form  $(a, b, c)$  dann reducirt, wenn  $|b| \leq a \leq c$  war. Dem Auftreten der Gleichheitszeichen in dieser Formel entspricht geometrisch, dass der bez. Punkt  $a, b, c$  auf den Rand des Fundamentalbaumes rückt; er befindet sich, wenn  $a = c$ , auf der Geraden  $EE'$ , wenn  $|b| = a$  auf den Geraden  $\infty E$  oder  $\infty E'$ . Wenn wir also geometrisch dem reducirten Gebiete einen Teil seiner Randpunkte wegnahmen, so werden wir arithmetisch die Gültigkeit des Gleichheitszeichens unter Umständen ausschliessen müssen. Nun ist, bei unserer Annahme über die Lage des Einheitspunktes in dem beibehaltenen Teile des Randes  $b > 0$ , in dem fortgelassenen  $b < 0$ . Dementsprechend werden wir die Gleichheitszeichen in

der obigen Formel nur im Falle  $b > 0$  bestehen lassen und werden jetzt die folgende schärfere Definition der reduirten Formen aufstellen: Eine Form  $(a, b, c)$  ist im Falle  $b > 0$  eine reduirte Form, wenn  $b \leq a \leq c$ , im Falle  $b < 0$  aber dann, wenn  $|b| < a < c$  ist. Nach dieser Verbesserung unserer ursprünglichen Definition können wir den Satz (welcher übrigens nur ein anderer Ausdruck für einen Satz der vorigen Seite ist) als ausnahmslos richtig aussprechen: dass in jeder Klasse äquivalenter definiten Formen immer nur eine reduirte Form enthalten ist.

Wir kommen noch auf die Frage nach den Automorphismen der definiten Formen zurück, weil uns die hierbei in Betracht kommenden Verhältnisse aus unserer Figur unmittelbar entgegen treten. Wie wir wissen, hängt das Vorhandensein der Automorphismen von den Lösungen  $t$  und  $u$  der Pell'schen Gleichung

$$t^2 + \Delta u^2 = 4$$

ab, wo  $\Delta = D$  die Discriminante der

217.

vorgelegten Form ist. Die Automorphie selbst ist dann eine Substitution

$$x = \alpha X + \beta Y$$

$$y = \gamma X + \delta Y$$

mit folgendem Coefficientenschema:

$$\begin{vmatrix} \frac{t - bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t + bu}{2} \end{vmatrix}$$

Heben wir eine Discriminante  $\Delta > 4$ , so besitzt die Pell'sche Gleichung ersichtlich nur die trivialen Lösungen:

$t = \pm 2$ ,  $u = 0$ , welche zu den Automorphismen Anlass geben  $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{vmatrix}$ . Die Form geht also bei  $\Delta > 4$  nur dann in sich über, wenn wir  $X$  und  $Y$  entweder ungeändert lassen, oder beide gleichzeitig im Vorzeichen vertauschen.

Ist dagegen  $\Delta = 4$ , so giebt es ein zweites Lösungspaar der Pell'schen Gleichung, nämlich  $t = 0$ ,  $u = \pm 1$ , und dementsprechend zwei weitere Automorphismen. Ist endlich  $\Delta = 3$ , so liefert jede der vier Vorzeichencombinationen in  $t = \pm 1$ ,  $u = \pm 1$

eine Lösung der Pell'schen Gleichung.  
 In den obigen Automorphismen, die dem Lösungspaar  $t = \pm 2, u = 0$  entsprechen, treten in diesem Falle noch 4 neue Automorphismen hinzu. In den beiden letztgenannten Fällen  $\Delta = 4$  und  $\Delta = 3$  gibt es je nur eine Formenkategorie, weil es nur eine reducirte Form giebt. Es ist dieses bez. die Form

$$X^2 + Y^2 \quad \text{und} \quad X^2 + XY + Y^2.$$

Wir sehen nun zu, wie sich das Vorhandensein der Automorphismen in unserer Figur darstellt. In dem Zwecke müssen wir von der Substitution  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  der Variablen  $x$  und  $y$  zu der entsprechenden Substitution der Variablen  $a, b, c$  übergehen. Die Substitution  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist natürlich in jenen, wie in diesen Variablen die identische Substitution. Ferner bedeutet die Substitution  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  in den Variablen  $a, b, c$  gleichfalls die Identität, wie aus den Formeln von pg. 178 sofort einleuchtet. Daher kommt das Vorhandensein dieser zweiten

Automorphie in unserer Figur nicht zum Ausdrucke. Überhaupt ändert das gleichzeitige Umkehren der Vorzeichen in den Coefficienten der Substitution  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  an der Collineation der Variablen  $a, b, c$  durchaus nichts. Daher werden die 4 Automorphien im Falle  $\Delta = 4$  und die 6 im Falle  $\Delta = 3$  nur 2 bez. 3 verschiedene Collineationen in der Ebene der  $a, b, c$  ergeben können. Dass nun in der That 2 bez. 3 Collineationen vorhanden sind, bei denen die Form  $x^2 + y^2$  bez.  $x^2 + xy + y^2$  ungeändert bleibt, ersieht man aus unserer Figur. Die Form  $x^2 + y^2$  wird nämlich durch den Punkt  $1, 0, 1$  repräsentirt, den wir in der Figur von pag. 213 mit  $F$  bezeichnet haben, die Form  $x^2 + xy + y^2$  wird durch den Einheitspunkt  $E$  mit den Coordinaten  $1, 1, 1$  dargestellt. Im Punkte  $F$  stossen 2, im Punkte  $E$  3 schraffierte (und ebenso viele nicht schraffierte) Dreiecke zusammen. Die Collineationen, durch welche diese 2 bez. 3 schraffirten Dreiecke in das

$P^a$  mit der Polaren von  $P$ . Der Pol  $P$  bildet das „Centrum“ unserer Sehne die „Axe“ dieser Perspective. Diese Operation stellt die projective Verallgemeinerung der gewöhnlichen Spiegelung dar und geht in jene über, wenn wir die Sehne speziell in einen Durchmesser des Kreises rücken lassen.

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der Substitutionen von der Determinante  $\pm 1$ . Dieselben bilden eine Gruppe, welche wir im Gegensatz zu der früheren die erweiterte Gruppe nennen. Wir erhalten übrigens diese ganze Gruppe, wenn wir zu der früheren Gruppe von Substitutionen mit der Determinante  $+1$  noch die spezielle Substitution  $w' = -w$  von der Determinante  $-1$  hinzunehmen. Denn wir können jede Substitution von der Determinante  $-1$  durch Combination dieser speciellen mit einer Substitution von der Determinante  $+1$  darstellen. (Der Deutlichkeit halber sei noch ausdrücklich hervorgehoben, dass die



zugehörigen Substitutionen der  $a, b, c$   
auch jetzt die Determinante  $+1$  haben,  
denn sie ist gleich  $(\alpha \beta - \beta \gamma)^2$ .

Der Fundamentalbereich dieser er-  
weiterten Gruppe besteht aus einem  
einzelnen schraffirten (oder nicht-  
schraffirten) Dreieck, etwa aus dem  
schraffirten Dreieck des reducirten Räu-  
mes, in demselben Sinne, wie bei un-  
serer früheren Gruppe der Fundamen-  
talbereich von dem Doppeldreiecke  
des reducirten Raumes gebildet wur-  
de. In der That zeigt sich, daß jeder  
Punkt des Kreisinnern durch eine Ope-  
ration unserer Gruppe in das schraffir-  
te Dreieck des reducirten Raumes ver-  
legt werden kann, und daß keine  
zwei Punkte des schraffirten Dreiecks  
unter sich äquivalent sind. Man  
kann nämlich erstlich jeden Punkt  
durch eine  $(\alpha \beta)$  Substitution von der  
Determinante  $+1$  in den reducirten  
Raum überhaupt überführen. Falls  
er dabei in das nichtschraffierte Drei-  
eck, so bringt man ihn durch die

Operation  $w' = -w$  in das schraffierte Dreieck hinein. Fällt er in das schraffierte Dreieck, so ist das Gewünschte ohne dies erreicht. Dass auch keine zwei Punkte des schraffierten Dreiecks unter sich äquivalent sein können, ergibt sich aus der Erzeugung der erweiterten Gruppe mittelst der Operationen von der Determinante  $+1$  und der speziellen Operation  $w' = -w$ , deren Wirkung uns einzeln bekannt ist.

Die arithmetische Definition des neuen Fundamentalbereichs ist diese:

$$0 \leq b \leq a \leq c$$

(wo überall die Gleichheitszeichen mitzählen).

Wir können jetzt die Construction unserer Figur nach einem neuen Princip beschreiben, indem wir die Operation der Spiegelung in dem oben festgestellten Sinne an die Spitze stellen. Wir gehen von dem schraffierten Dreieck des reduzierten Raumes aus und bemerken, dass die 3 anliegenden nicht-schraffierten Dreiecke aus diesem durch

Spiegelung an der gemeinsamen Dreiecksseite entstehen. Bei zweien dieser Dreiecke ist das ohne weiteres klar, weil es sich bei ihnen um eine gewöhnliche Spiegelung handelt. Bei dem dritten Dreiecke, wo die Spiegelung als harmonische Perspective erklärt werden muß, folgt das Behauptete aus der Entstehung unserer Figur durch harmonische Construction. Wir betrachten sodann eines dieser drei nicht schraffirten Dreiecke und die ihm anliegenden drei schraffirten. Auch diese gehen wegen der fundamentalen Eigenschaften unserer Figur aus dem nicht-schraffirten durch Spiegelung an den gemeinsamen Dreiecksseiten hervor. Dasselbe gilt überhaupt für jedes Dreieck unserer Figur und die daselbe umgebenden drei Nebendreiecke, weil die Spiegelung eine projective Operation ist und weil jedes Dreieck unserer Figur mit jedem anderen projectiv verwandt ist. Wir können daher die

ganze Figur dadurch successive entstehen lassen, dass wir jedes einzelne Elementardreieck, welches wir erhalten, immer auf's Neue an seinen Seitenspiegeln. Da alle Dreiecksseiten, zu denen wir so gelangen, Elementarseiten sind, d. h. rationale Punkte  $\frac{\alpha}{f}$  und  $\frac{\beta}{f}$  der Kreisperipherie verbinden, so werden alle unsere Spiegelungen ganzzahlige Substitutionen  $(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix})$  u. zw. natürlich ganzzahlige Substitutionen von der Determinante  $-1$ . Speziell ist dabei  $\alpha + \delta = 0$ . Von hier aus bestätigt man sofort, dass jeder Punkt des Kegelschnittes von jedem Punkt des schraffierten Elementardreiecks durch eine ganzzahlige Substitution  $(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix})$  äquivalent ist, welche die Determinante  $+1$  hat, wenn es sich um einen Punkt eines schraffierten Dreiecks, die Determinante  $-1$ , wenn es sich um einen Punkt eines nicht-schraffierten Dreiecks handelt. Die fragliche Substitution von der Determinante  $+1$  oder  $-1$  erhält man einfach durch zusammen-

setzung einer geraden oder ungeraden Anzahl von Einzelspiegelungen, durch welche man von dem Elementardreieck des reducirten Gebietes zu demjenigen Dreieck hingelangt, welchem der gerade betrachtete Punkt angehört.

Wir fragen auch bei dieser erweiterten Gruppe nach den Automorphismen. In dem Ende denken wir uns zu einem Punkte  $a, b, c$  die Gesamtheit seiner im Sinne der erweiterten Gruppe äquivalenten Punkte, d. h. das System seiner Spiegelpunkte hinzu. (Man denke an die Anordnung der Spiegelbilder bei einem Kaleidoskop.) Eine Automorphie liegt dann und nur dann vor, wenn zwei Punkte dieses Systems zusammenrücken. Da aber je zwei Spiegelpunkte durch eine Dreiecksseite getrennt werden, findet dieses nur dann statt, wenn der Punkt  $a, b, c$  in einer Dreiecksseite gelegen ist. In diesem Falle bleibt

unser Punkt bei zwei Operationen der erweiterten Gruppe ungeändert, nämlich bei der identischen Operation und bei der Spiegelung an der betr. Dreiecksseite. Ein spezieller Fall hiervon ist es, wenn der Punkt in eine Dreiecksseite hineintrückt. Alsdann rücken aus dem System der äquivalenten Punkte 4, 6 oder gar unendlich viele Punkte in dieselbe Ecke hinein, je nachdem es sich um eine Ecke handelt, welche mit den Punkten,  $F$ ,  $E$  oder  $\infty$  des reducirten Gebietes (vergl. S. 213.) äquivalent ist. Dementsprechend bleibt ein solcher Punkt bei 4, 6 oder unendlich vielen Operationen der erweiterten Gruppe ungeändert.

Wollen wir die entsprechenden Resultate für quadratische Formen aussprechen, so müssen wir berücksichtigen, daß die Anzahl der Automorphismen durch Feingnahme der Substitution  $x = -x'$ ,  $y = -y'$ , welche auf unsere Figur keine

Wirkung ausübt, sich verdoppelt.  
Daraufhin formulieren wir die folgenden Sätze:

1. Eine beliebige binäre definite Form geht durch zwei Automorphismen der erweiterten Gruppe in sich über, nämlich durch die identische Substitution und durch die Operation  $x = -x'$ ,  $y = -y'$ !

2. Wenn der repräsentierende Punkt in einer Elementarstrecke unserer Figur liegt, so bleibt die Form bei 4 Operationen ungeändert.

3. Wenn der repräsentierende Punkt in eine Dreiecks Ecke rückt, so wird die Form durch 8 oder durch 12 oder auch durch unendlich viele Operationen der erweiterten Gruppe in sich transformiert.

Wir stellen noch die arithmetischen Kriterien für das Vorhandensein ungewöhnlicher Automorphismen zusammen, wobei wir jedoch nur von der Formenklasse sprechen und diese durch ihre reduzierte Form repräsentieren. Hinsichtlich des Satzes 2) haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der reduzierte Re-

präsentant der Klasse einer Elementarschne erster oder zweiter Art angehört.

Im ersten Falle ist

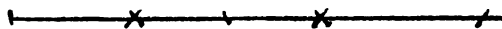
$$b = 0,$$

im zweiten

$$b = a \text{ oder } a = c.$$

Der zweite Fall zerlegt sich hiernach noch in zwei Unterarten a) und b).

Um dieselben in allgemeingültiger Weise von einander zu sondern, bemerke man, dass jede Elementarschne zweiter Art zwei Dreiecke  $\mathcal{E}$  trägt,



welche dieselbe in ein inneres und zwei äussere Stücke zerlegt. Im Falle a) liegt der reducirte Punkt auf einem äusseren, im Falle b) auf einem inneren Stücke der Elementarschne zweiter Art. Die Aussagen des Satzes 3) greifen Platz, wenn der repräsentirende Punkt in eine Ecke unserer Dreiecksteilung hineinrückt. Lassen wir die auf der Peripherie gelegenen Ecken ausser Acht, weil wir doch von definiten Formen sprechen



und diese im Innern des Kreises ihre Darstellung finden, so haben wir wiederum zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle ist die reducirte Form characterisirt durch

$$b = 0, a = c \text{ (d. h. den Punkt } \mathcal{F} \text{)}$$

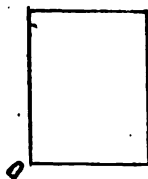
im zweiten Falle durch

$$a = b = c \text{ (den Punkt } \mathcal{E} \text{)}.$$

Auch die arithmetische Theorie der quadratischen Formen beschäftigt sich mit den soeben aufgezählten Ausnahmeformen. Sie werden dort Anceps-Formen oder auch Ambige Formen genannt. In unserem Sinne bedeutet das Wort Anceps eben dieses, daß der die Anceps-Form repräsentirende Punkt zwei Fundamentalbereiche zu gerechnet werden kann.

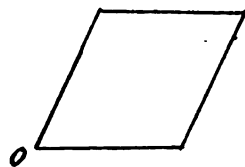
Da die Anceps-Formen für die spätere Theorie von besonderer Wichtigkeit sind, wollen wir ihre Eigenart noch durch die zugehörigen Gitter characterisiren, wie bereits kurz vor Weihnachten begonnen wurde.

Entsprechend der allgemeinen Construction der Gitter, wonach bei definiten Formen die Seiten des Elementarparallelogrammes  $V_a$  und  $V_c$ , der Winkel zwischen diesen  $\varphi = \arccos \frac{b}{2\sqrt{a_1}}$  betragen sollte, sind die Anceps-Klassen der



ersten Art (mit dem Repräsentanten  $b = 0$ ) dadurch charakterisiert, dass sie ein Rechteckiges Punktgitter besitzen. Wir können näm-

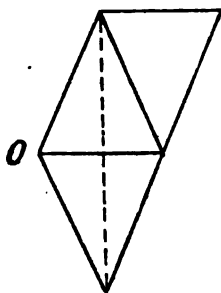
lich ihr Gitter, indem wir eine geeignete Form, eben die reducirte Form mit  $b = 0$ , also  $\varphi = 90^\circ$  der Klasse, herausgreifen, aus einzelnen Rechtecken aufbauen.



Ferner sind die Anceps-Klassen der zweiten Art dadurch ausgezeichnet, dass ihr Punktgitter durch ein System von Rhomben erzeugt werden kann.

Liegt nämlich die erste Unterart mit dem Repräsentanten  $a = c \text{ vor}$ , so liefert die reducirte Form der Klasse direkt ein Parallelogitter mit

rhomboischen Elementarparallelogrammen.



Liegt die zweite Unterart vor ( $a = b$ ), so ist für die reducirte Form  $Tc \cdot \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , so dass die eine Hälfte des Elementarparallelogramms ein gleichschenkeliges Dreieck wird. Man stellt

dann durch eine Umordnung der Gitterstäbe, wie aus der nebenstehenden Figur ersichtlich ist, aus dem Parallelgitter der reducirten Form wiederum ein rhombisches Gitter her. Diese beiden Unterarten können noch durch den bei 0 gelegenen Winkel der Rhomben unterschieden werden. Im ersten Falle ( $a = c$ ) besteht nach der Definition unseres  $a, b, c$ -Koordinatensystems für die Coefficienten der reducirten Form die Ungleichung  $b < a$ . Daher haben wir in dem rhombischen Gitter der reducirten Form  $\cos \varphi = \frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$  oder  $\varphi > 60^\circ$ . Im zweiten Falle ( $a = b$ ) gilt für die Coefficienten der reducirten Form die Ungleich-

chung  $a \perp c$ . Hittin wird in dem Gitter der reducirten Form  $\cos \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} < \frac{1}{2}$  oder  $\varphi > 60^\circ$ . In dem aus dem reducirten Gitter erzeugten rhombischen wird der Winkel bei  $0$  gleich  $2\varphi$  oder  $> 120^\circ$ . Der zweite Winkel im Rhombus ergänzt diesen ersten selbstverständlich zu  $180^\circ$ . Wir können daher sagen: die Winkel der Rhomben unterscheiden sich im ersten Falle von einem Rechten um weniger, im zweiten Falle um mehr als  $30^\circ$ .

Die höheren Ausnahmefälle, denen 8 und 12 Automorphien entsprechen, ordnen sich in die aufgezählten Gitter als Grenzfälle ein. So bildet diejenige Klasse, deren reducirte Form die Coefficienten  $a, b, c$  hat, den Übergang zwischen unsern beiden Unterarten von rhombischen Gittern.



Wir haben daher hier einen Rhombus mit einem Winkel von  $60^\circ$  als Elementarparallelogramm. Das zu dieser Klasse gehörige Gitter bezeichnen wir als gleichseitiges, weil es durch Aneinanderlagerung von

gleichseitigen Dreiecken erzeugt werden kann. Andererseits bildet der Fall  $a = c$ ,  $b = 0$  den Uebergang von den rhombischen zu den rechteckigen Gittern. Das Elementarparallelogramm dieses Falles ist daher gleichzeitig ein Rhombus und ein Rechteck, d. h. es ist ein Quadrat. Demnach wird das Gitter dieser Klasse als quadratisches Gitter zu bezeichnen sein.

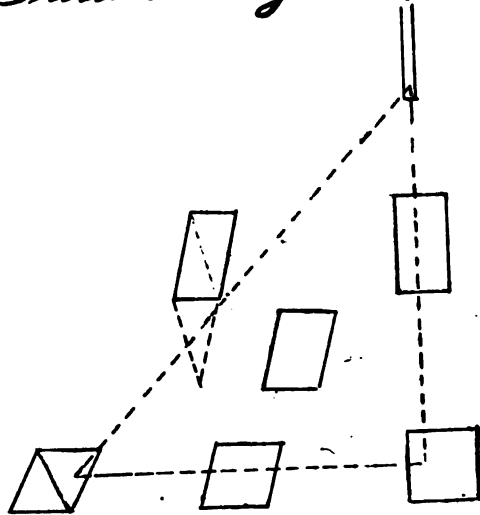
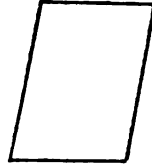


Wollen wir schliesslich auch noch die dritte Ecke unseres Fundamentaltalbereichs  $a = 0$ ,  $b = 0$  berücksichtigen, so haben wir für diese ein ausgeartetes Elementarparallelogramm mit der Seite  $\sqrt{a} = 0$  zu verzeichnen. Übrigens müssten wir dasselbe von rechts wegen unendlich langzeichnen, weil sein Inhalt die endliche Grösse  $-(b^2 - 4ac)$  betragen soll.



Endlich gehören zu den allgemeinen quadratischen Formen, deren repräsentierende Punkte im Innern des Fundamentaltalbereiches liegen, Gitter von denen wir auf Grund der

Ungleichungen  $0 < b < a < c$   
 nur aussagen können, dass  
 ihr Winkel  $\varphi > 60^\circ$  ist,  
 und dass die Seite  $Vc$  je-  
 desmal länger ist als  
 die Seite  $Va$ . Fragen wir die den einzel-  
 nen Stellen des Fundamentalbereiches  
 zugehörigen Parallelogramme in  
 dem folgenden Schema andeutungs-  
 weise ein, erhalten wir eine Über-  
 sicht über den kontinuierlichen Zu-  
 sammenhang zwischen der Lage der  
 Punkte  $a, b, c$  im Fundamentalbe-  
 reich und der Gestalt der zugehöri-  
 gen Parallelogramme.

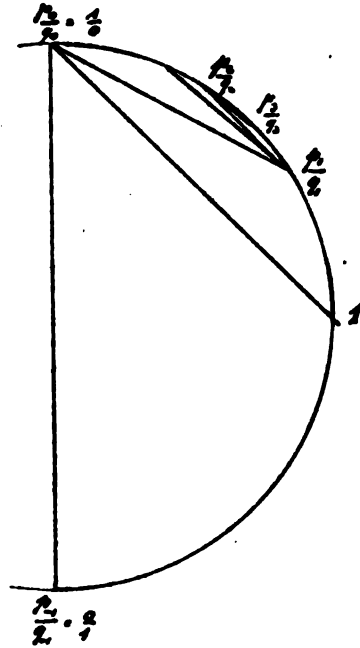


Indem wir unsere Betrachtung der definierten Formen beendigen, betonen wir nochmals die Schönheit unserer Dreiecksconstructionen, welche die ganze Theorie der Congruenz in sich enthalten. Diese Schönheit ruht natürlich auf dem hohen Grade der Symmetrie, welche die Figur besitzt, d. h. auf der grossen Zahl von Transformationen, welche dieselbe in sich selbst überführen. Man darf wohl sagen, dass die moderne Geometrie keine Figur aufgedeckt hat, welche einen so weitgehenden Gedankeninhalt besässe. Über die Zahlentheorie hinaus beherrscht unsere Figur die Theorie der elliptischen Modulfunktionen und leitet von hier aus zu den automorphen Functionen über, in deren Theorie ähnliche (verallgemeinerte) geometrische Constructionen Platz greifen. Auch auf höhere Gebiete der Zahlentheorie lässt sich unser geometrisches Verfahren verallgemeinern. Deutet man beispielsweise die Coefficienten von quadra-

Näherungspunkte der Kettenbruchentwicklung verbinden. Dabei gehen von dem Näherungspunkte  $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$  (er Elementarsequenzen aus, welche nach den  $(u_{r-1})$  folgenden Näherungspunkten und dem  $(r+1)$ ten Hauptnäherungspunkte führen. Wir haben in dieser Weise die Kettenbruchentwicklung allerdings nur für ein rationales  $w$  gedeutet. Für ein irrationales  $w$  bleibt die Sache aber gerade so, mit dem einzigen Unterschiede, dass wir hierbei den Punkt  $w$  niemals mit einer Sehne wirklich erreichen, sondern ihm nur mehr und mehr nahe kommen. Die so entstehende Figur hat in der Hauptsache die Gestalt einer nicht abbrechenden Kickyack-Linie, welche je die Hauptnäherungspunkte der Kettenbruchentwicklung verbindet. In den Ecken der Kickyacklinie laufen noch je  $(u_{r-1})$  Geraden fächerförmig zusammen. Messen wir die Größe der Eckenwinkel etwa durch die Anzahl dieser Geraden, so können wir die Bedingung



für die Äquivalenz zweier irrationaler Punkte  $w$  und  $w'$  so formulieren: Es müssen in den zu gehörigen Hitzack hinein von einer gewissen Stelle ab die Ecken gleich gross werden. Die rationalen Punkte bilden zusammen eine Klasse äquivalenter Punkte. Dieselben liegen, wie aus der Construction der rationalen Scala hervorgeht, auf dem Kegelschnitte überall dicht. Dasselbe gilt auch von jeder Klasse irrationaler  $w$ . Wir behaupten nämlich: In jedem beliebig klein gegebenen Stücke der Kreisperipherie liegen immer Punkte, welche zu einem gegebenen  $w$  äquivalent sind. In der That liegen in dem gegebenen Stücke sicher zwei Punkte, welche Endpunkte einer Elementarsehne erster



Art sind. In dieser Elementarlehre können wir von der Sehne  $o\omega$  ausgehend durch eine Fickjack-Linie hingelangen. Setzen wir von da aus die Linie nach dem durch die Kettenbruchentwicklung von  $\omega$  angegebenen Schema fort, indem wir die Größe der folgenden Ecken nach den Teilnennern  $(u_r$  von  $\omega$  bestimmen, so nähern wir uns hierdurch einem Punkte  $\omega'$ , welcher mit  $\omega a e_2$  äquivalent ist und welcher unserer Construction zufolge innerhalb des vorgegebenen Stückes der Kreisperipherie liegt. Hiermit ist gezeigt, daß auch die Punkte der sämtlichen irrationalen Klassen von  $\omega$ -Werten auf dem Kegelschnitte überall dicht liegen.

In diesem Gewirre von äquivalenten Punkten kann sich die geometrische Anschauung nicht mehr zurecht finden; nur die arithmetische Behandlung wird hier die Frage der Äquivalenz entscheiden können. Die Dinge liegen also auf dem Rande des fundamentalen Kegelschnittes

gerade umgekehrt, wie im Innern. Während dort die arithmetischen Verhältnisse im geometrischen Bilde sehr übersichtlich wurden, versagt hier die geometrische Anschauung völlig - ein Beispiel dafür, wie sich der geometrische und der arithmetische Standpunkt wechselweise ablösen müssen. Vielleicht kann man sagen: die geometrische Auffassung ergibt überall da aber auch nur da Erleichterungen, wo es sich um arithmetische Ungleichungen handelt.

Wir knüpfen hieran eine Bemerkung, welche für die Auffassung der Gruppeneigenschaft von principieller Bedeutung ist. Wie wir sahen, hat auf dem Rande des Kegelschnittes unsere Gruppe der  $(\alpha, \beta)$  Substitutionen nirgends einen Bereich, in dem sie discontinuirlich ist.

Beachtet man nur dieses, so möchte man unsere Gruppe für continuirlich halten. Das ist sie aber keineswegs, denn im Innern des Kegel-

schnittes besitzt sie ihre wohl abgegrenzten Fundamentalbereiche. Um diese Verhältnisse kurz bezeichnen zu können, werden wir sagen: Unsere Gruppe ist im Innern des Kegelschnitts eigentlich, auf dem Rande uneigentlich - discontinuirlich, womit aber nichts über die Gruppe als solche, sondern nur etwas über ihr Verhalten in diesem Gebiete ausgesagt sein soll. Die Gruppe als solche ist discontinuirlich schlechtweg.

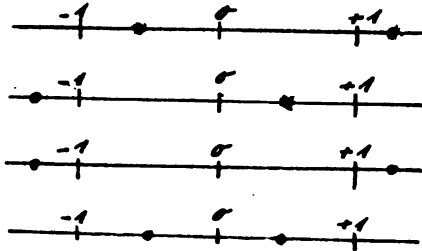
#### 4. Die indefiniten Formen mit $D > 0$ und die Punkte ausserhalb des Kegelschnittes.

Es bleiben die indefiniten Formen mit  $D > 0$  zu behandeln, denen das Aeusserere des Kegelschnittes zukommt. Wir fragen auch hier zunächst nach dem reducirten Räume. Die Definition der reducirten Formen ( $A, B, C$ ) war diese:  $A > 0, C < 0$ . Des genaueren teilten wir die reducirten Formen in folgende Anz.

terabteilungen ein

Hauptreduc.	I. Art.	$A + B + C < 0, A - B + C > 0.$	
"	II. Art.	$> 0,$	$< 0.$
Nebenreduc.	I. Art.	$< 0,$	$< 0$
"	II. Art	$> 0,$	$> 0$

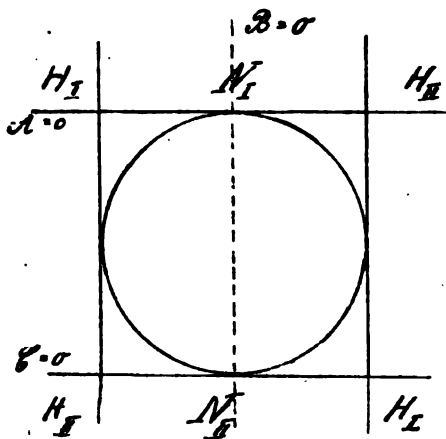
Wurzeln  $\lambda$  von  $\lambda^2 A^2 + B\lambda + C = 0$ :



Wir bemerken, dass die hiermit gegebene Definition der reducirten Formen einigermaßen im Widerspruch steht mit unserer geometrischen Darstellung, in welcher nur die Verhältnisse  $A : B : C$  zum Ausdruck kommen, während es in den vorstehenden Ungleichungen auf die absoluten Werte der  $A, B, C$  ankommt. Wir characterisiren die reducirten Formen daher lieber durch die (jetzt natürlich reellen) Wurzeln, welche sich beim

Nullsetzen der Form ergeben, sagen wir durch die Wurzeln  $N_1, N_2$  der Gleichung  $A N^2 + B N + C = 0$ . Durch die relative Lage dieser Wurzeln gegenüber den Werten  $-1, 0, +1$  sind, wie früher hervorgehoben, unsere Unterabteilungen gleichfalls unterschieden. Diese Lage ist in dem obigen Schema pag 245 dargestellt. Da  $N_1, N_2$  die Parameter der Punkte bedeuten, in welchen die Tangenten vom Punkte  $A, B, C$  den Kreis berühren, so kann man daraufhin die resp. Gebiete für unsere 4 Arten reducirter Formen bestimmen. Zunächst ist klar, dass reducirte Formen überhaupt oberhalb der oberen und unterhalb der unteren horizontalen Tangente des Kreises gelegen sind. Im Uebrigen beschreibt sich die Verteilung der reducirten Formen am Einfachsten, wenn man das von den horizontalen und verticalen Tangenten begrenzte vollständige Viereck betrachtet. Dasselbe theilt die Ebene in 4 Dreiecke und 3 Vierecke. Von diesen werden

2 Vierecke durch  
die Hauptreduc-  
tionen erster und  
zweiter Art, zwei  
Dreiecke durch  
die Nebenreduc-  
tionen erster  
und zweiter  
Art ungenom-  
men, wie in  
der Figur nä-  
her angegeben  
ist.



Hier fällt zunächst in's Auge, daß das Gebiet der reduzierten Formen gewissermaßen einen viel grösseren Teil des Gesamtgebietes der indefiniten Formen einnimmt, als das reduzierte Gebiet im Falle der definiten Formen that. Dafür gilt in dem jetzigen reduzierten Bereiche nicht mehr der Satz, daß keine zwei Punkte derselben unter sich äquivalent sind, vielmehr gehört zu jeder reduzierten Form noch eine unendliche Kette äqui-

valenter, reducirter Formen hinzu, eine  
 Kette, welche sich nur im Falle commen-  
 surabler  $A, B, C$  mit einer endlichen  
 Gliederzahl (der Gliederzahl in der Perio-  
 de der reducirten Formen) schliesst.

Unsere erste Aufgabe wird nun sein,  
 die zu einem reducirten Punkte unse-  
 rer Figur (oder auch die zu irgendwel-  
 chem Punkte) gehörige Kette durch geo-  
 metrische Construction zu ermitteln.  
 Dabei stützen wir uns auf einen wich-  
 tigen Gedanken, welcher von Hermité  
 zuerst algebraisch ausgesprochen  
 ist (in Crelle Bd. 41, 1851) und der  
 später in's Geometrische übersetzt  
 worden ist (vergl. Modulfunctionen  
 Bd I pag. 256, ferner die wiederholt  
 genannte Abhandlung von Hurwitz  
 in Math. Annal. Bd. 45). Hermité  
geht davon aus, dass die Reduction  
der definiten Formen bekannt ist; er  
spielt nun die Aufgabe für die in-  
definiten Formen in das Gebiet  
der definiten Formen hinüber, in-  
dem er jeder indefiniten Form



definite Formen in geeigneter Weise covariant zugeordnet, d.h. in solcher Weise, dass die Beziehung zwischen der gegebenen Form und den zugeordneten durch die Substitutionen  $(\alpha, \beta)$  nicht getört wird.

Do. d. 30. I. 96. Um diese covariante Beziehung naturgemäss zu entwickeln, bemerken wir, dass die einzelne quadratische Form  $f = (a, b, c)$  als einzige Invariante ihre Discriminante  $b^2 - 4ac$  besitzt, welche bei Substitutionen von der Determinante  $\pm 1$  völlig ungeändert bleibt. Handelt es sich darum eine invariante Beziehung zwischen 2 quadratischen Formen  $f = (a, b, c)$  und  $f' = (a', b', c')$ , also eine simultane Invariante der beiden Formen aufzustellen, so betrachten wir das Büschel der Formen  $f + \lambda f'$ . Bilden wir die Discriminante einer beliebigen Form des Büschels:

$$(b + \lambda b')^2 - 4(a + \lambda a')(c + \lambda c'),$$

so muss dieselbe invarianter Natur

sein, u. zw. bei beliebigen Werten von  $\lambda$ . Es müssen also auch die Coefficienten der nach  $\lambda$  geordneten Discriminante

$$(b^2 - 4ac) + 2\lambda (bb' - 2ac' - 2a'c) + \lambda^2 (b'^2 - 4a'b')$$

Invarianten werden. Der Coefficient von 1 und  $\lambda^2$  liefert nichts Neues, der Coefficient von  $2\lambda$  aber giebt die gesuchte simultane Invariante der Formen  $f$  und  $f'$ , nämlich

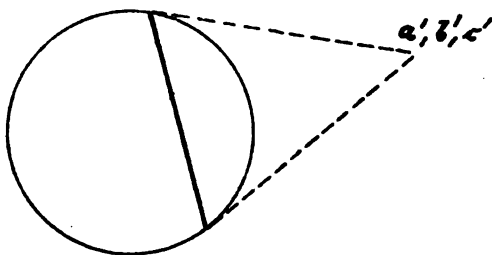
$$bb' - 2ac' - 2a'c.$$

Es sei nun  $(a', b', c')$  die gegebene indefinite Form. Wir ordnen ihr diejenigen definiten Formen  $(a, b, c)$  zu, welche mit ihr eine verschwindende simultane Invariante haben. Wir sind dann sicher, dass, bei einer Transformation der Form  $(a', b')$  mittelst einer  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  Substitution, der transformirten indefiniten Form in demselben Sinne diejenigen definiten Formen entsprechen, welche durch jene Transformation aus den Formen

( $a, b, c$ ) hervorgehen.

Geometrisch bedeutet diese Zuordnung nichts anderes, als den Uebergang von dem Pole ( $a', b', c'$ ) zu seiner Polare, oder genauer gesagt zu seiner „Polarschne“ indem nämlich von der Polare nur dasjenige Stück betrachtet wird, welches definite Formen trägt, welches also im Innern des fundamentalen Kegelschnitts enthalten ist. Hiernit zeigt sich denn auch, daß es wirklich definite Formen der gewollten Art gibt. Die obige algebraische Definition hat jedoch vor der geometrischen, den Vorzug vor aus, dass sie die Verallgemeinerungsfähigkeit des Ansatzes auf höhere Fälle besser hervor-  
treten lässt.

Durch das Be-  
mitte' wie Trin-  
cip wird in  
die Zahlenthe-  
orie ein Begriff

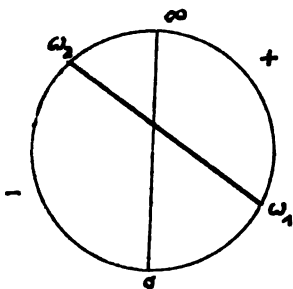


eingeführt, der ihr sonst fremd ist, nämlich der Begriff der stetigen Zahlenreihe. Statt des einzelnen Zahlentripels  $(a', b', c')$  wird eine stetige Folge von Zahlen  $(a, b, c)$ , statt des einzelnen Punktes ein geometrischer Ort von Punkten substituirt. In diesem Sinne überschrieb Cauchy seine oben genannte Arbeit: Introduction des variables continues dans la théorie des nombres.

Wir haben jetzt unsere früheren Resultate hinsichtlich der Reduction der indefiniten Formen in die Vorstellungen des neuen geometrischen Bildes zu übersetzen. Wir fragen zunächst: Wie liegen die Polarsehnen, welche zu den reducirten Formen gehören? Die Bedingung für die reducirten Formen heisst  $A > 0, C < 0$ . Man ergiebt  $A\omega^2 + B\omega + C$  gleich Null gesetzt die Berührungspunkte  $\omega_1, \omega_2$  der Tangenten vom Punkte  $A = B = C$  und gleichzeitig die Endpunkte der Polarsehne. Die Punkte  $\omega_1, \omega_2$  zerlegen die Kreisperipherie in 2 Teile:

In einem derselben ist  $Aw^2 + Bw + C$  positiv, im anderen negativ. Wir bemerken, dass durch die Lage der Polarsehne über das Vorzeichen von  $Aw^2 + Bw + C$  noch nichts ausgesagt wird. Unser geometrisches Bild

ist aus diesem Grunde noch unvollständig, und zwar gerade in einer Hinsicht, die für die Reduktionstheorie wesentlich ist. Wir können unser geometrisches Bild

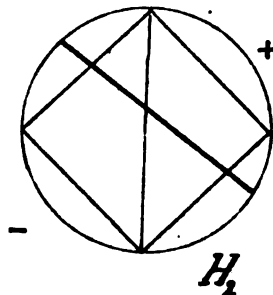
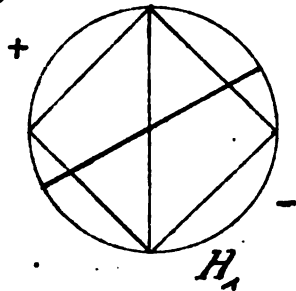


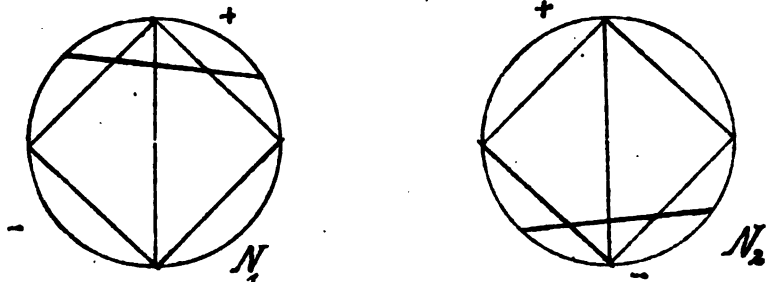
aber leicht vervollständigen, indem wir dem einen Abschnitt der Kreisperipherie, in welchem  $Aw^2 + Bw + C > 0$  ist, das Zeichen +, dem andern das Zeichen - hinzusetzen, wie bestehend geschieht. Alsdann zeigt unsere Figur nicht nur die Lage des Punktes  $A: B: C$ , sondern auch das Vorzeichen von  $A$  und  $C$ . Es wird beispielsweise  $C < 0$  sein, wenn der Punkt  $w = 0$  in dem negativen Segment der Kreisperipherie liegt; dann für  $w = 0$  reducirt sich  $Aw^2 + Bw + C$

auf  $C$ . Es wird ferner  $A > 0$  sein, wenn der Punkt  $w = \infty$  in dem positiven Segmente enthalten ist; denn für  $w = \infty$  stimmt das Vorzeichen von  $Aw^2 + Bw + C$  mit dem von  $A$  überein. Berücksichtigen wir dieses, so lautet die Bedingung des Reducirtseins als Eigenschaft der Polarschne ausgesprochen folgendermassen: Es muss der Punkt  $\infty$  im positiven, der Punkt  $0$  im negativen Segmente liegen. Daraus folgt, dass die zu einer reducirtten Form gehörige Polarschne jedenfalls die Mittellinie  $(0 \infty)$  unserer Figur schneiden wird.

Im Uebrigen unterscheiden wir noch Haupt- und Nebenreducirte und Reducirte erster und zweiter Art. In der Figur kommt dieses darauf hinaus, dass wir die Polarschnen je nach ihrer Lage gegen gewisse Elementarschnen charakterisiren. Betrachten wir nämlich die Tabelle von pag. 245, so beruht die Einteilung der Reducirten auf dem Vorzeichen von  $A \pm B + C$ , also auf dem Vorzeichen des Ausdrucks

$A\omega^2 + B\omega + C$  für  $\omega = +1$  und  $\omega = -1$ .  
 Geometrisch gesprochen kommt es also  
 darauf an, ob die Punkte  $+1$  und  $-1$   
 der Kugelsphäre im positiven oder ne-  
 gativen Segmente liegen. Wir verbin-  
 den diese Punkte mit  $0$  und  $\infty$  und  
 erhalten ein dem Kreise eingeschrie-  
 benes Quadrat. Im Anschluss an die-  
 ses lässt sich der Unterschied zwischen  
 Haupt- und Nebenreducirten einfach  
 so ausrechnen: Die Polarsehnen von  
Hauptreducirten treffen das Quadrat  
in zwei gegenüberliegenden Seiten, die  
Polarsehnen von Nebenreducirten in  
zwei bei  $0$  oder  $\infty$  zusammenstossen-  
den Seiten. Die vollständige Unter-  
 scheidung ergibt sich aus den fol-  
 genden Figuren, deren Richtigkeit  
 ein Vergleich mit der Tabelle von  
 pg. 245 lehrt:

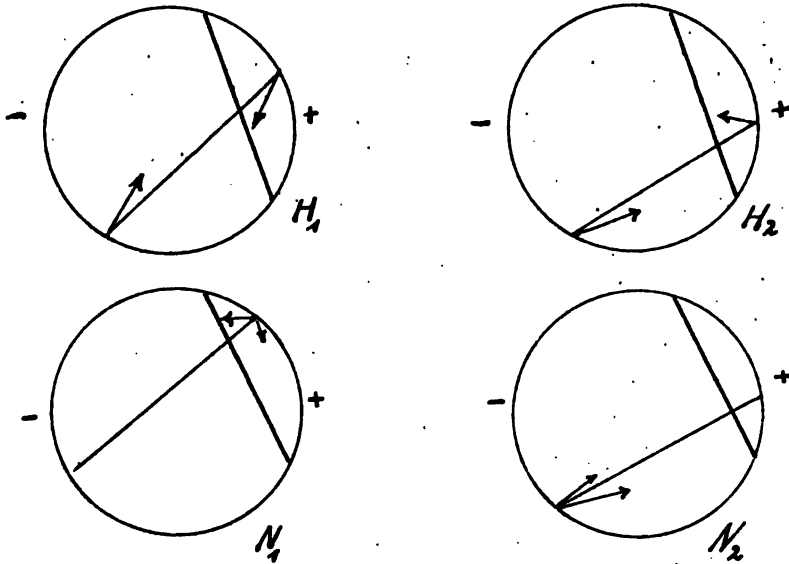




Weiter untersuchen wir die Lage einer (nicht notwendig reducirten) Polarschne gegen die Gesamtheit der Elementarschnen erster Art. Wir greifen zunächst irgend eine Elementarschne heraus, welche von unserer Polarschne geschnitten wird. An diese Elementarschne legen sich nach der einen und anderen Seite hin je ein Constructivsdreieck an, dessen beide weitere Seiten wieder von Elementarschnen gebildet werden. Von diesen beiden Seiten der benachbarten Constructionsdreiecke wird je eine durch unsere Polarschne geschnitten. Wir markiren diese Seite in einem und anderen Dreiecke und nennen sie die zu der ersten Elementarschne benachbarten



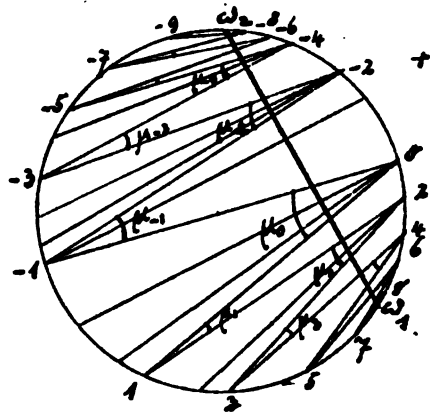
Schnen. Jede Elementarsehne hat in diesem Sinne einen rechten und einen linken Nachbar. Nach der Lage dieser Nachbarn gegen die ursprüngliche Elementarsehne unterscheiden wir 4 Fälle, die wir im Folgenden schematisch verzeichnen:



War unsere Polarsehne nicht reduziert, so ist es jetzt leicht eine Transformation anzugeben, die sie zu einer reduzieren macht. Unsere erste Elementarsehne hat zu Endpunkten gewis-

sehne asymptotisch einschliessen. Von den einzelnen Ecken dieser Fidezacklinie strahlen eventuell eine Anzahl von Nebensehnen (sagen wir  $(n-1)$  Nebensehnen) aus. Die Ecken der Fidezacklinie bezeichnen wir, von einer beliebigen Ecke beginnend, mit  $(0), (1), (2), \dots, (-1), (-2), \dots$ . Die zu den bez. Ecken gehörigen Fahlen  $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{-1}, \dots)$  betrachten wir als ein Mass für die Grösse des Eckenwinkels.

Jede dieser Elementarsehnen gibt uns eine Transformation an die Hand, durch welche wir unsere Polarsehne zu einer reducirten machen können.



Der Aufeinanderfolge dieser Elementarsehnen läuft daher eine Aufeinanderfolge von reducirten Formen parallel. Wir behaupten

num: Diese Aufeinanderfolge reducirter  
Formen ist mit der früher betrachteten  
Kette reducirter Formen direct iden-  
tisch. Wir erhalten also die frühere  
Kette, indem wir der Reihe nach alle  
Sehnen unserer Sehnenkette derart  
in die Mittellinie transformiren,  
dass immer das positive Sehnenen-  
de nach  $\omega = \infty$  fällt.

Exci. d. 31. I. 96. Der Beweis dieses Satzes lässt  
 sich direct von unserer Figur aus führen,  
 (Vergl. hierzu Hurwitz, in der mehrfach  
 genannten Arbeit, Math. Ann. Bd. 45).  
 Wir ziehen es aber vor, auf unsere frühe-  
 re Gitterfigur zu recurriren, um so den  
 Zusammenhang zwischen dem jetzigen  
 und dem damaligen geometrischen Bil-  
 de herzustellen.

Die reducirten Formen, welche wir nach  
 unserer jetzigen Methode erhalten, sind  
 den Elementarsehnen der Fickgackli-  
 nie eindeutig zugeordnet. Jede Ele-  
 mentarsehne können wir dabei er-  
 setzen durch ihre Endpunkte, d. h.  
 durch ein Paar rationaler Punkte,

wobei der eine Punkt des Paares auf dem positiven, der andere auf dem negativen Segmente der Kreisperipherie gelegen ist.

Wir erinnern uns nun an die beiden „natürlichen Umrisf' polygone“ der früheren Gitterfigur, denen eines im positiven Quadranten, das andere im nebenliegenden negativen Quadranten lag. Die Ecken des ersten Polygons wurden mit den geraden, die Ecken des anderen mit den ungeraden Indices bezeichnet, und nun wurden die reducirten Formen dadurch gewonnen, dass man jedesmal eine Ecke des einen Polygons mit der darauf folgenden Ecke des anderen Polygons zusammennahm. Können wir nun zeigen, dass jene Punkte der Kreisperipherie und diese Eckpunkte der natürlichen Umrisf' polygone gegenseitig eindeutig zusammengehören, so wird dadurch gleichzeitig bewiesen, dass auch die reducirten Formen, welche wir durch die eine oder

andere Methode erhalten können, dieselben sind.

Zunächst führen wir für die rationalen Parameterwerte der Fierzack-Ecken eine passende Bezeichnung ein. Es heiße der zur Ecke  $(r)$ -gehörige Parameter  $\frac{p_r}{q_r}$  (wobei wir die  $p_r, q_r$  als teilerfremde ganze Zahlen voraussetzen). Alsdann haben wir etwa auf dem positiven Kreis-segmente die Eckpunkte

$$\dots \frac{p_{-2}}{q_{-2}}, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$$

mit den zugehörigen Winkelgrößen

$$(\mu_{-2}, \mu_0, \mu_2, \dots)$$

Ebenso liegen auf dem negativen Kreis-segmente die Punkte

$$\dots \frac{p_{-1}}{q_{-1}}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \dots$$

mit den zugehörigen Winkeln

$$\dots (\mu_{-1}, \mu_1, \mu_3, \dots)$$

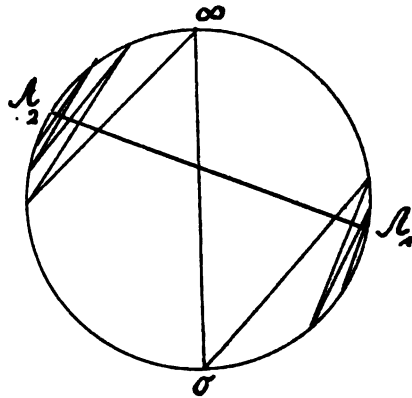
Zwischen diese Zahlen ordnen sich noch die zu den freien Enden der Nebenschneen gehörigen Parameter-

werte ein.

Andererseits bezeichnen wir die Coordinaten  $x$  und  $y$  der Ecken unserer zur Form  $f(x, y)$  gehörigen natürlichen Umrisspolygone mit  $(p_r, q_r)$ . Wir behaupten nun, dass die Zahlen  $p_r$  und  $q_r$  in beiden Fällen dieselben sind. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus dem Zusammenhang unserer beiderlei Figuren mit gewissen Kettenbruchentwickelungen.

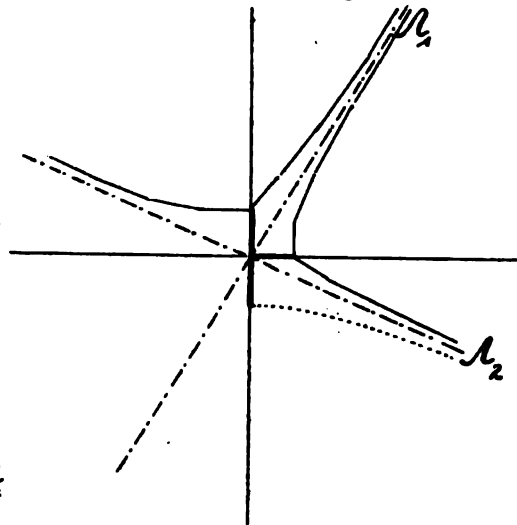
Was zunächst die Kreisfigur betrifft, so transformiren wir in dieser die Sehne mit den Endpunkten  $\frac{p-1}{q-1}$  und  $\frac{p}{q}$  auf die bekannte Art und Weise in die Mittellinie der Figur, wobei die Polsehne in die Polare einer reducirten Form  $F$  verwandelt wird.

Die transformirte Fidezyoklinie sondern wir in zwei Hälften, welche beide von der Mittellinie ausgehend nach rechts und



links hin auf die Wurzeln  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  von  $F=0$  zustreben. Von solchen Teilzirkel-  
 zacklinien lernten wir auf pg. 241, dass  
 sie genau die Kettenentwickelungen  
 derjenigen Kreispunkte wiedergeben,  
 auf welche sie zustreben, wobei ihre  
 Ecken die Näherungsbrüche, ihre Winkel  
 die Teilnenner des Kettenbruches lie-  
 fern. Daraus folgt, dass die Fahlen  
 $f_{p,r}$  bei positivem Index die Näherungs-  
 Früche von  $\mathcal{N}_1$ , bei negativem die  
 von  $\mathcal{N}_2$  darstellen.

Andererseits betrachten wir die natür-  
 lichen Umrisspolygone in der Gitterfigur.  
 Führen wir ein re-  
 ducirtes  $x, y$ -Coor-  
 dinatensystem ein,  
 so zerschneiden  
 seine Axen die na-  
 türlichen Umriss-  
 polygone gleich-  
 falls in zwei  
 Hälften, welche  
 sich bez. dem Null-  
 strahlen  $\frac{x}{y} = \mathcal{N}_1$ ,



oder  $\frac{x}{y} = N_2$  der zu dem benutzten Coordinatensystem gehörigen reducirten Form  $F$  anschmiegen. Die auf solche Weise entstehenden Teilpolygonzüge stellen aber ihrerseits nach Früherem die Kettenbruchentwicklung von  $N_1$ , bez. von  $N_2$  dar, wobei jetzt die Polygonecken die Coordinaten  $x = p_r, y = q_r$  erhalten. Wir dürfen dabei ersichtlich annehmen, dass die Wurzeln  $N_1, N_2$ , die wir jetzt betrachten, dieselben sind, wie vorher bei der Kettenbruchentwicklung auf der Kreisperipherie. Da nämlich unsere Umrisspolygone sämtliche reducirten Formen liefern, so muss es möglich sein, das Coordinatensystem so zu legen, dass gerade die vorher benutzte reducirte Form  $F$  sich ergibt. Hiethin haben die Eckpunkte der Umrisspolygone die selben Grössen  $p_r, q_r$ , zu Gittercoordinaten, welche vorher in den Parameterwerten der Fickzackketten auftraten.

Nach den Bemerkungen zu Bō.



ginn dieses Beweises folgt dann weiter, dass in der That unsere beiden Figuren hinsichtlich der Reduktion der indefiniten Formen dasselbe leisten. Der innere geometrische Zusammenhang dieser beiden so verschiedenen Figuren ist jedenfalls ein sehr merkwürdiger. Wir bemerken noch, dass die freien Ecken der  $(u-1)$  Nebensehnen, welche von einem Eckpunkte unserer Wickzacklinie auslaufen, ihrerseits die Parameterwerte  $w = \frac{p}{q}$  aufweisen, welche den Coordinaten  $p, q$  der  $(u-1)$  Nebensehnen entsprechen, welche die correspondirende Seite des einen Umrisspolygons im Gitter trägt.

Es wird nun darauf ankommen, aus der neuen Figur neue zahlen-theoretische Resultate abzuleiten.

Wir nehmen zunächst die Frage nach den Automorphismen einer Form  $f$  noch einmal auf. Wir wollen jetzt 4 Arten von Automorphismen unterscheiden, welche durch

was folgende Schema charakterisiert sind:

$$1. \alpha \delta - \beta \gamma = +1, \omega_1 \sim \omega_1, \omega_2 \sim \omega_2$$

$$2. \alpha \delta - \beta \gamma = +1, \omega_1 \sim \omega_2, \omega_2 \sim \omega_1$$

$$3. \alpha \delta - \beta \gamma = -1, \omega_1 \sim \omega_2, \omega_2 \sim \omega_1$$

$$4. \alpha \delta - \beta \gamma = -1, \omega_1 \sim \omega_1, \omega_2 \sim \omega_2$$

Im Falle 2. und 3. werden hiernach die Wurzelpunkte von  $f=0$  auf dem Kreise vertauscht, im Falle 1. und 4. bleiben sie fest. Im Falle 1. und 2. handelt es sich um eine Substitution, welche den positiven Sinn, in welchem wir uns die Kegelschnittperipherie durchlaufen denken mögen, ungeändert lässt, im Falle 3. und 4. um eine Substitution, welche diesen Sinn umkehrt.

Der Fall 1. ist früher ausführlich untersucht worden. Der Determinante  $+1$  und dem Festbleiben der Wurzelpunkte entsprechend wird dabei das positive Segment unseres Kegelschnitts in das positive, das negative in das negative übergeführt. Dieser Fall führt auf die

gewöhnliche Theorie der Pöll'schen Gleichung  $+^2 - Du^2 = 4$ .

Im Falle 2. wird die Kreisperipherie in sich verschoben, so dass  $w_1$ , nach  $w_2$  und  $w_2$  nach  $w_1$  gelangt. Da (wegen der Substitutionsdeterminante  $+1$ ) die Reihenfolge der einzelnen Teile der Kreispherie nicht geändert wird, so gelangt hierbei das positive Segment an den Platz des negativen und das negative an den des positiven; es geht  $f$  in  $-f$  über. Der zweite Fall tritt hiernach dann ein, wenn eine Form ihrer entgegengesetzten einigentlich äquivalent ist. Die Form heißt dann sich selbst „invers“, vergl. pag. 161:

Der Fall 3. bedeutet eine Spiegelung an einer Elementarsehne, welche das positive und negative Segment je in 2 Abschnitte zerlegt. Bei der Spiegelung werden diese Abschnitte des positiven Segments (und ebenso die des negativen) unter sich ausgetauscht, so dass  $+f$  in  $+f$  übergeht. In diesem

Falle gehört  $f$  zu einer Anceps. Klasse.

Der Fall 4. gibt zu der „aussergewöhnlichen Pell'schen Gleichung“  $t^2 - Du^2 = -4$

Anlass. Das positive und negative Segment des Kreises werden im Falle 4. gegenseitig vertauscht;  $f$  geht daher in  $-f$  über.

Bei commensurablen  $a, b, c$  sind die Automorphien 1. wie wir wissen, immer u. zw. in unendlicher Zahl vorhanden. Zugleich ist klar, dass diese Automorphien nur bei commensurablen  $a, b, c$  eintreten, denn  $f=0$  soll mit den Fixpunkten von  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  übereinstimmen. Von den 3 anderen Arten braucht im Allgemeinen keine aufzutreten. Diese letzteren bedingen sich dabei gegenseitig, in dem Sinne, dass das Eintreten von zweien derselben auch Automorphien des dritten Falles nach sich zieht. Wenn beispielsweise Automorphien des Falles 2. und 3. vorhanden sind, so erhält man durch Zusammensetzung von zwei solchen Automorphien eine Automor-

sphie von der Determinante  $-1$ , welche  $\omega_1$  in  $\omega_2$ , und  $\omega_2$  in  $\omega_1$  überführt, d. h. eine Automorphie des Falles 4. Aus dieser Bemerkung fließen Sätze der folgenden Art: Wenn es in einer Anagn. Klasse eine Form gibt, welche mit ihrer entgegengesetzten eigentlich äquivalent ist, so besitzt die aussergewöhnliche Pell'sche Gleichung Lösungen etc. Fall 4. ist wieder durchaus daran gebunden, dass die Coefficienten  $a, b, c$  der vorgelegten Form commensurabel sind.

Do. d. 6. I. 96. Wir fragen nun nach der geometrischen Bedeutung dieser 4 Arten von Automorphien. Zum vollen Verständnis dessen müssen wir uns eine Begriffsbildung aneignen, welche von Cayley herrührt, die Cayley'sche Kreisbestimmung. Dieselbe hängt auf's Innigste mit unserer Dreiecksfigur und allen jenen höheren Figuren zusammen, welche sich beim Studium von Gruppen linearer Substitutionen in der Theorie der automorphen

Functionen darbieten. Leider können wir hierauf nicht mehr so ausführlich eingehen, als es der Wichtigkeit der Sache angemessen wäre.

Wir haben schon im ersten Theil dieser Vorlesung bei den Gitterbetrachtungen eine Pseudometrik eingeführt. Damals genügte es uns, statt der imaginären Kreispunkte zwei andere (reelle oder imaginäre) Punkte der unendlich fernen Geraden zu substituiren und diese einer Haassbestimmung zu Grunde zu legen. Jetzt gehen wir mit Cayley einen Schritt weiter. Wir fassen nämlich die beiden Kreispunkte zusammen mit der doppelzählenden Verbindungslinie, d. i. der unendlich weiten Geraden, als einen ausgearteten Kegelschnitt auf und ersetzen ihn durch einen nichtausgearteten. In unserem Falle wählen wir als solchen unseren fundamentalen Kegelschnitt  $D = 0$ . Die Cayley'sche Haassbestimmung steht nun zu diesem Kegelschnitt in einer ganz ähnlichen

Beziehung, wie die gewöhnliche Neass-  
bestimmung zu dem Paar der imaginären  
Kreispunkte. Um zunächst den Winkel  
zweier Geraden zu definieren, ziehen wir  
von ihrem Schnittpunkte aus die Tangen-  
ten an den fundamentalen Kegelschnitt  
und berechnen das Doppelverhältnis (D)  
jener Geraden mit diesen Tangenten. Als-  
dann bezeichnen wir als Winkel ( $\omega$ ) je-  
ner beiden Geraden die Grösse

$$\omega = \frac{i}{2} \lg D$$

Dualistisch genau entsprechend defini-  
ren wir die Entfernung zweier Punkte,  
indem wir zu den gegebenen Punkten  
die Schnittpunkte ihrer Verbindungsli-  
nie mit dem fundamentalen Kegel-  
schnitt hinzunehmen und das Doppel-  
verhältnis (D') dieser 4 Punkte bilden.  
Alsdann bezeichnen wir als Entfernung  
(E) der gegebenen Punkte

$$E = \frac{i}{2} \lg D'.$$

Dieses die einfachen Grundzüge jener  
Theorie. Ich muss es Ihnen überlassen,  
sich in dieselbe soweit einzulassen,

dass Sie sich wannöglich in einer mit Cayley'scher Haassbestimmung ausge-  
statteten Ebene gleich leicht, wie in der  
gewöhnlichen, zurecht finden.

Hier interessiren uns vornehmlich die  
Substitutionen ( $\mathcal{L}, \mathcal{B}$ ), welche uns gewisse  
Collineationen der Ebene liefern. Da  
dieselben unseren fundamentalen  
Kegelschnitt in sich überführen, so  
lassen sie auch die Haassverhältnis-  
se der Figuren völlig un geändert.  
Zwei Geraden bilden also nach der  
Collineation denselben Winkel, wie  
vor derselben, zwei Punkte haben  
vor und nach der Collineation die  
selbe Entfernung. Wir unterscheiden  
dabei zwischen den Substitutionen  
von der Determinante  $+1$  und denen  
von der Determinante  $-1$ . Bei den  
ersteren bleibt auch der Sinn, in dem  
die Punkte des Kegelschnitts auf  
einander folgen, un geändert, bei  
den letzteren wird er umgekehrt.  
Irgend eine Figur der Ebene geht  
daher bei den Substitutionen



$\alpha\beta\gamma = +1$  in eine direct congruente,  
 bei den Substitutionen  $\alpha\beta\gamma = -1$  in  
 eine invers congruente über. Wir be-  
 zeichnen die ersteren als Bewegungen,  
 die letzteren als Umlegungen der Ebene.  
 Wir würden die Gesamtheit dieser Be-  
 wegungen und Umlegungen erhalten,  
 wenn wir die  $\alpha, \beta, \gamma, \rho$  als continuirliche  
 Parameter ansehen wollten, wenn  
 sie aber nur ganzzahlige Werte an-  
 nehmen können haben wir eine in  
 dieser Gesamtheit enthaltene dis-  
 continuirliche Untergruppe vor  
 uns.

Bei allen Bewegungen und Um-  
 legungen dieser Untergruppe geht  
 unsere Figur in sich über und zwar  
 geht bei der Gesamtheit unserer  
 Bewegungen jedes schraffierte Dreieck  
 in jedes schraffierte, bei der Ge-  
 samtheit der Umlegungen jedes  
 schraffierte in jedes nicht-schraf-  
 fierte Dreieck über. Jedes schraffir-  
 te Dreieck ist also in Sinne der  
Cayley'schen Raasseometrie mit

wahl der Geraden ist. Im Sinne der Cayley'schen Haassbestimmung können wir dies so ausdrücken: Jede Gerade durch  $a, b, c$  wird vermöge der Collineation um einen constanten Winkel gedreht.

Die Grösse dieses Winkels hängt aufs Einfachste mit dem Pöll'schen Winkel zusammen. Führen wir für den Augenblick solche Dreiecks-Coordinaten  $x_1, x_2, x_3$  ein, dass die Gleichungen der beiden Tangenten lauten  $x_1 = 0$  und  $x_3 = 0$ , die Gleichung ihrer Berührungsechne  $x_2 = 0$ , so können wir unsere Collineation in der Form anschreiben:

$$\rho x'_1 = \lambda x_1, \quad \rho x'_2 = x_2, \quad \rho x'_3 = \mu x_3.$$

Nun wird aber die Gleichung des fundamentalen Kegelschnittes, folgende Gestalt haben  $x_2^2 - K x_1 x_3 = 0$ , wo  $K$  irgend einen Werte hat, den man durch Annahme des Einheitspunktes noch beliebig fixiren kann. Da unsere Collineation diesen Kegelschnitt in sich transformiren soll, so folgt, dass  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ . Betrachten wir eine beliebige

279.

ge Gerade  $x'_1 + v x'_3 = 0$  durch den Punkt  $a, b, c$ ; dieselbe geht bei unserer Collocation über in  $\frac{x'_1}{\lambda} + v \lambda x'_3 = 0$ . Das Doppelverhältnis der 4 Geraden

$$x'_1 + v x'_3 = 0, x'_1 + v \lambda^2 x'_3 = 0, x'_1 = 0, x'_3 = 0$$

wird nun ersichtlich gleich  $\lambda^2$ , der Cayley'sche Drehungswinkel also gleich  $i \lg \lambda$ .

Wollen wir diesen Winkel in den Constanten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ausdrücken, so bemerken wir, dass  $\lambda^2$  derjenige Factor ist, mit welchem sich der Quotient aus den linken Seiten der Tangentengleichungen  $x'_1 = 0, x'_3 = 0$  bei der Transformation multiplicirt. Wir haben nämlich  $\frac{x'_1}{x'_3} = \lambda^2 \frac{x_1}{x_3}$ . In den früheren Coordinaten lauten die Gleichungen der Tangenten  $x_1 = 0$  und  $x_3 = 0$  nach pag 182 folgendermassen:  $A\omega_1^2 + B\omega_1 + C = 0$  und  $A\omega_3^2 + B\omega_3 + C = 0$ , (wo wir die laufenden Coordinaten zur Unterscheidung von den Coordinaten  $a, b, c$  des festen Poles durch grosse Buchstaben bezeichnet haben). Wir wollen hier noch die

Wurzeln  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  der Gleichung:

$$A \mathcal{N}^2 + B \mathcal{N} + C = 0$$

einführen. Dann werden die Gleichungen unserer Tangenten:

$$(\mathcal{N}_1 - w_1)(\mathcal{N}_2 - w_1) = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\mathcal{N}_1 - w_2)(\mathcal{N}_2 - w_2) = 0;$$

der Ausdruck, dessen Verhalten wir bei der Pell'schen Substitution untersuchen sollen, ist daher:

$$\frac{(\mathcal{N}_1 - w_1)(\mathcal{N}_2 - w_1)}{(\mathcal{N}_1 - w_2)(\mathcal{N}_2 - w_2)}$$

Aber die Pell'sche Substitution schreibt sich in dem Parameter  $\mathcal{N}$  nach pag 144 folgendermassen:

$$\frac{\mathcal{N} - w_1}{\mathcal{N} - w_2} = \left( \frac{t + u \sqrt{D}}{2} \right)^2 \frac{\mathcal{N}' - w_1}{\mathcal{N}' - w_2}.$$

Indem wir diese Formel gleichzeitig auf  $\mathcal{N}_1$  wie auf  $\mathcal{N}_2$  anwenden, erhalten wir:

$$\frac{(\mathcal{N}_1 - w_1)(\mathcal{N}_2 - w_1)}{(\mathcal{N}_1 - w_2)(\mathcal{N}_2 - w_2)} = \left( \frac{t + u \sqrt{D}}{2} \right)^4 \frac{(\mathcal{N}'_1 - w_1)(\mathcal{N}'_2 - w_1)}{(\mathcal{N}'_1 - w_2)(\mathcal{N}'_2 - w_2)}.$$

Der Factor, mit dem sich bei der Pöll'schen Substitution der Quotient unserer Tangentengleichungen multiplicirt, ist daher

$$\lambda^2 = \left( \frac{t + u\sqrt{5}}{2} \right)^4.$$

Hiethin wird

$$i \lg \lambda = 2i \lg \frac{t + u\sqrt{5}}{2};$$

dieses ist aber das Doppelte derjenigen Grösse, welche pg 145 als Pöll'scher Winkel definiert wurde. Der Cayley'sche Winkel ist also einfach gleich dem Doppelten des Pöll'schen Winkels.

Die Hauptpunkte der Pöll'schen Theorie aber drücken sich in der Sprache der Cayley'schen Raasbestimmung folgendermassen aus: Es gibt in unserer Gruppe zu jedem rationalen Centrum  $\alpha, \beta, \gamma$  unendlich viele Drehungen; dieselben setzen sich aus einer kleinsten durch fortgesetzte Wiederholung zusammen; die zugehörigen Drehungswinkel werden berechnet, indem man die sämtlichen Wurzeln der Pöll'schen Gleichung benutzt.

Nun Vergleich ziehen wir noch die Automorphien der definiten Formen heran. Wir haben zwei Arten derselben zu unterscheiden, solche von der Periode 2 und solche von der Periode 3. Die ersten gehören zu Formen, welche in den Mittelpunkten der Dreieckskanten, die letzteren zu Formen, welche in den Mittelpunkten der Dreiecksflächen ihre repräsentirenden Punkte hatten.

Auch diese Automorphien sind im Sinne unserer Noaaarbestimmung Drehungen. Der Drehungswinkel beträgt beziehungsweise  $180^\circ$  und  $120^\circ$ . Wir können die Drehungsmittelpunkte der ersten Art als  $N_2$ , die der zweiten als  $N_3$  bezeichnen. Diese Punkte liegen discontinuirlich im Innern des Kegelschnittes zerstreut. In demselben Sinne, werden wir alle rationalen Punkte ausserhalb des Kegelschnittes (und ebenso die rationalen Punkte auf dem Rande desselben) als  $N_{\infty}$  bezeichnen können, weil sie Centren für Cayley'sche Drehungen

von unendlich hoher Periode, d. h. für aperiodische Drehungen sind. Dieselben erfüllen das Aeusserere (imnden Rand) des Kegelschnitts überall dicht.

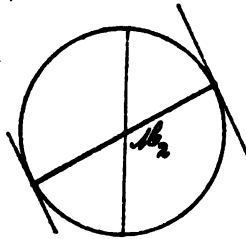
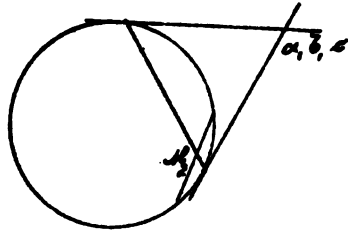
Der Fall 2. der Automorphismen trat ein bei einer mit sich selbst „inversen“ Formelklasse. Dabei wurden die Wurzeln  $w_1$  und  $w_2$ , d. h. die Enden der zum Punkte  $a, b, c$  gehörigen Polarsehne gegen einander vertauscht. Da diese Vertauschung durch eine Bewegung der Ebene geschieht, so muss auf der Sehne ein Punkt liegen, in welchem eine Collineation unserer Gruppe u. zw. eine Collineation von der Periode 2 ihren Fixpunkt hat. Die Sehne muss daher durch einen der Punkte  $M_2$  hindurchgehen.

Um auch ein arithmetisches Kriterium für diesen Fall der Automorphismen hinzuzufügen, bemerken wir, dass durch den Punkt  $M_2$  der Polaren notwendig eine Elementarsehne erster Art der

Dreiecksfigur hindurchgeht. Diese Elementarsehne können wir durch eine Collineation unserer Gruppe in die Mittellinie der Figur transformiren, wobei der Punkt  $K_2$  in den Punkt  $K_2$  der Mittellinie, also in den Punkt mit den Coordinaten  $b=0, a=c$  übergeht. Gleichzeitig wird dabei unsere Form  $(a, b, c)$  in eine reducirte Form  $(A, B, C)$  verwandelt, (weil ihre Polare nach der Transformation die Mittellinie im zugehörigen Punkte  $K_2$  schneidet). Die Gleichung der Polaren des reducirten Punktes

$$Bb - 2Ac - 2Ca = 0$$

muss hiernach erfüllt sein, wenn wir für  $a, b, c$  speciell die Coordinaten dieses





Punktes  $K_2$  eintragen. Es muss also sein

$$A + C = 0.$$

Dieses die gesuchte arithmetische Bedingung für das Eintreten des 2<sup>ten</sup> Falles der Automorphien. Man erkennt unmittelbar, dass diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

Hierin haben wir den Satz:

Soll eine Form mit sich selbst invers (d. h. mit ihrer inversen eigentlich äquivalent) sein, so muss in der Kette der reduzierten Formen eine solche Form vorhanden sein, deren erster und letzter Coefficient entgegengesetzt gleich sind.

Wir kommen zu den Fällen 3. und 4. Hier handelt es sich um Substitutionen von der Determinante  $-1$ . Wir bezeichnen unter ihnen diejenigen Operationen, bei denen eine Lehre unserer Dreiecksfigur ungeändert bleibt, als Spiegelungen

A. C oder eine solche mit B. 0.

Im Falle 4) endlich handelt es sich um eine Umlegung der Ebene, bei der die Wurzeln  $w_1, w_2$  in der Gleichung  $aw^2 + bw + c = 0$  ungeändert bleiben. Hieraus werden wir gerade so, wie auf pg. 14 Bedingungen für die Coefficienten ( $\gamma, \delta$ ) der Substitution ableiten können. Dieselben drücken sich ebenso wie dort mit Hülfe zweier ganzer Zahlen  $t$  und  $u$  aus, zwischen denen jetzt, da die Determinante der Substitution gleich  $-1$  ist, die Gleichung besteht  $t^2 - Du^2 = -4$ . Diese Gleichung heist die anvergewöhnliche Pell'sche Gleichung. Um das Vorhandensein von Automorphismen des Falles 4. zu entscheiden, sind wir auf die Untersuchung dieser Gleichung angewiesen, über deren Lösungen im allgemeinen nichts ausgesagt werden kann. Wir müssen uns darauf beschränken, Tabellen zu citiren, in denen immer die kleinste Lösung dieser Gleichung ange-

geben wird (falls Lösungen überhaupt vorhanden sind) nämlich:

Legendre: Théorie des nombres  
Bd I Tab. X (der deutschen Ausgabe).

Cayley: Gesammelte Werke Bd.  
II pg 40.

Nennen wir die betr. kleinste Lösung  $t_0, u_0$  und bilden uns die complexe Zahl  $\frac{t_0 + u_0 \sqrt{D}}{2}$ , so erhält man aus ihr die <sup>2</sup>sämmtlichen Lösungen der beiden Pell'schen Gleichungen  $t^2 - Du^2 = \pm 4$ , indem man  $\frac{t + u \sqrt{D}}{2} = \left( \frac{t_0 + u_0 \sqrt{D}}{2} \right)^v$  setzt und  $v$  alle ganzen, positiven und negativen Zahlen durchlaufen lässt.

Die geraden  $v$  ergeben dabei die Lösungen  $t^2 - Du^2 = +4$ , die ungeraden  $v$  diejenigen von  $t^2 - Du^2 = -4$ .

Frei d. F. II. Nachdem wir unsere Dreiecksfigur für die Reduction der einzelnen indefiniten Form verwendet haben, bleibt jetzt noch die abschliessende Frage zu besprechen nach der Gesammtheit der reducirten Formen einer Klasse. Von

Seiten der Zahlentheorie wissen wir darüber, dass die reducirten Formen eine Kette von unendlicher Gliederzahl bilden, die aperiodisch ist, falls nicht gerade die  $a, b, c$  commensurable Zahlen sind. In geometrischer Hinsicht möchte man nun erfahren: Wie vertheilen sich die repräsentirenden Punkte auf das reducirte Gebiet? Nach einem bekannten Grundsätze von Weierstrass müssen unendlich viele Punkte mindestens eine Häufungsstelle haben. Man wird also vor allem fragen: wo liegen die Häufungsstellen etc.? Diese interessanten Fragen sind bisher gänzlich unerledigt.

Nur eine negative Aussage lässt sich ohne Weiteres hierüber geben: Es ist nicht möglich das Aeusserere des Kegelschnittes so in Fundamentalbereiche zu zerlegen, dass keine zwei Punkte des einzelnen Bereiches äquivalent sind. Dass dieses im Innern des Kegelschnitts möglich war, lag daran, dass die Fixpunkte

te  $H_2$  u.  $H_3$  der Collineationen im Innern des Kegelschnittes einen endlichen Abstand von einander haben. In Folge dessen legen sich hier die Fundamentalbereiche, indem jeder an einen Punkt  $H_2$  und einen Punkt  $H_3$  heranzieht, als Gebiete endlicher Ausdehnung an einander. Der Winkel, mit dem sich der Bereich an seinen Punkt  $H_2$ , bezw.  $H_3$  heranzieht, ist der zugehörige Pöll'sche Winkel, d. h.  $180^\circ$ , bezw.  $120^\circ$ . Dies ist ersichtlich notwendig. Nun wissen wir aber, dass im Aeusseren des Kegelschnittes jeder rationale Punkt Fixpunkt einer Collineation ist, und dass die rationalen Punkte die Ebene überall dicht überdecken. Der gesuchte Fundamentalbereich müsste sich daher an jeden seiner rationalen Punkte mit einer Ecke heranziehen, deren Winkel durch den Pöll'schen Winkel der betr. Automorphie bestimmt ist. Wir würden so zu

einem Bereiche kommen, der unse-  
rer Raumvorstellung absolut un-  
zugänglich ist und welcher das  
Gegenteil von einer kontinuierlichen  
Gebietsüberdeckung darstellt. Es  
ist noch eine offene Frage, wie man  
die vorliegenden zahlentheoretischen  
Ergebnisse hinsichtlich der indefini-  
ten Formen in ihrer Gesamtheit  
geometrisch aufzufassen hat.

Dabei liegen die Verhältnisse ausser-  
halb des Kegelschnittes auch durchaus  
anders, als es auf der Peripherie  
desselben der Fall ist. Auf der Periphe-  
rie waren die sämtlichen Klassen  
äquivalenter Punkte, wie wir sahen,  
überall dicht verteilt. Das findet aus-  
serhalb nicht mehr statt. Denn bei-  
spielsweise gibt es zu jedem rationalen  
Punkte ja nur eine endliche An-  
zahl äquivalenter Punkte. In gewis-  
ser Hinsicht sind also hier die  
äquivalenten Punkte sogar aus-  
serordentlich dünn verteilt.

Wir wollen das vorliegende Pro

lem noch in abstracterer Weise aus-  
sprechen. Wir wollen nämlich allge-  
mein fragen: Ist es möglich die  
Classen oder indefiniten Formen  
irgendwie in der Ebene zu lokalisai-  
ren? (so dass jeder Classe ein ein-  
ziger repräsentirender Punkt zu-  
gewiesen wird).

Eine Classe indefiniter Formen  
ist vollkommen bestimmt durch  
eine Reihe von ganzen Zahlen

...  $(\mu_{-2}, \mu_{-1}, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, -1$

welche wir uns als Seitenlängen eines  
Umrisspolygons (im Gitter) oder als  
Winkelöffnungen einer Trickzacklinie  
(innerer Dreiecksfigur) vorstellen können.

Zwei Formen sind äquivalent, wenn ihre  
zugehörigen Zahlenreihen identisch aus-  
fallen, wobei die Reihen natürlich noch  
gegeneinander verschoben sein können.  
Es käme nun darauf an, die Gesamt-  
heit dieser Zahlenreihen in übersichtli-  
cher Weise geeigneten Punkten einer  
Ebene zuzuordnen. Wir kommen so  
auf ein Problem von viel mehr arith.

metrischem als geometrischem Charac-  
ter, welches an die Ideen der Cantor'  
schen Mengenlehre erinnert. Welches  
ist der durch die Natur der Sache ge-  
gebene „Ordnungstypus“ der von un-  
seren Zahlenreihen gebildeten Menge?

„Zum Abschlusse werden wir sagen  
müssen, dass die Theorie der indefiniten  
Formen viel und schwieriger aber auch  
interessanter ist, als die der definiten  
Formen, weil sie auf noch unerledigte  
Fragestellungen führt. Aber eben dess-  
halb müssen wir diese Theorie jetzt  
verlassen.

---

Nunmehr kehren wir zu den defini-  
ten Formen zurück. Dabei werden wir  
für den Rest der Vorlesung unserer Be-  
trachtungen ausser auf Zahlentheorie  
und Geometrie noch auf den dritten  
Grundpfeiler der mathematischen  
Gesamtwissenschaft, auf die Func-  
tionentheorie, stützen. Wir überschreiben  
nämlich das folgende Capitel:



Ueber den Zusammenhang  
der definiten quadratischen  
Formen mit der Theorie der  
elliptischen Functionen.

Der Grund dieses Zusammenhanges ruht auf der elementar-geometrischen Vorstellung eines Parallelogitters, zu welchem die quadratischen Formen einerseits und die elliptischen Functionen andererseits hinführen.

Die Gittertheorie der definiten Formen ist uns von früher bekannt. Wir können dabei unsere Gitter (da es sich ausschliesslich um definite Formen handeln soll) in der gewöhnlichen Maassbestimmung construiren. Wir tragen bei gegebener Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

von einem Punkte  $o$  die Strecken  $Ta$  und  $Tc$  unter dem Winkel

$$\chi = \arccos \frac{b}{2Tac}$$

gegen einander ab. Dabei werden wir gegen früher  $\gamma$  zweckmässigerweise eine kleine Modification eintreten lassen. Wir legen nämlich die Strecken so, dass  $Tc$  durch eine positive Drehung um den Winkel  $\chi$  in  $Ta$  übergeht. Diese Festsetzung hat das Unbequeme, dass in der Folge die  $x$ - und  $y$ - Axen die umgekehrte Lage haben werden; wie gewöhnlich; sie ist aber nothwendig, wenn wir mit den üblichen Bezeichnungen aus der Theorie der elliptischen Functionen in Uebereinstimmung sein wollen.

An das erste Parallelogramm setzen wir fortgesetzt congruente an; die Ecken dieser Parallelogramme haben zu Coordinaten  $x$  und  $y$  ganze Zahlen. Der Wert der Form  $f$  im Punkte  $x$   $y$  wird geometrisch durch die (elementar gemessene) Entfernung  $r^2 = ax^2 + bxy + cy^2$  gegeben. Die Form  $f$  lösen wir in zwei conjugirt imaginäre Bestandtheile auf. Dabei können

wir noch dem einen Bestandtheil einer Proportionalitätsfactor willkürlich hinzufügen, vorausgesetzt, dass wir dem anderen den reciproken Factor beilegen. Sollen die Bestandtheile conjugirt imaginär sein, so muss der Factor die Form haben  $e^{i\varphi}$ , so dass unsere Zerlegung lautet:

$$f = e^{i\varphi} \left( \tau a x + \frac{b + \sqrt{D}}{2\tau a} y \right) e^{-i\varphi} \left( \tau a x + \frac{b - \sqrt{D}}{2\tau a} y \right).$$

Der einzelne Bestandtheil ist eine complexe Zahl u. zw. - gerade diejenige, welche dem Gitterpunkte  $x, y$  in der Gaussischen Ebene zukommt. Der Factor  $e^{i\varphi}$  werde als Azimuthalfactor bezeichnet, der Winkel  $\varphi$  bedeutet nämlich dasjenige Azimuth, unter dem die  $x$ -Axe gegen die Axe der reellen Zahlen in der Gaussischen Ebene geneigt ist. Wir nennen

$$e^{i\varphi} \left( \tau a x + \frac{b + \sqrt{D}}{2\tau a} y \right)$$

eine complexe Gitterzahl. Die Form  $f$  erscheint dabei als Norm dieses Systems von Gitterzahlen.

Andrerseits führt ein parallelogrammatisches Gitter sofort auf den Begriff der doppelperiodischen Functionen. Die Perioden  $\omega_1, \omega_2$  derselben sind diejenigen complexen Zahlen, welche den Endpunkten der von 0 auslaufenden Parallelogrammseiten entsprechen. Die allgemeinste Periode lautet dann, unter  $x, y$  ganze Zahlen verstanden  $\omega_1 x + \omega_2 y$ . Wollen wir  $\omega_1, \omega_2$  durch die Coefficienten der quadratischen Form ausdrücken, so haben wir

$$\omega_1 = e^{i\ell} \sqrt{a}$$

$$\omega_2 = e^{i\ell} \frac{b + i\sqrt{D}}{2\sqrt{a}},$$

wie man erkennt, wenn man in dem oben stehenden Ausdrucke der Gitterzahlen  $x=1, y=0$  bez.  $x=0, y=1$  einträgt. Wollen wir umgekehrt die quadratische Form durch  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ausdrücken, so berechnen wir die Norm

der allgemeinen complexen Gitterzahl oder, was dasselbe ist, die Norm der allgemeinen Periode

$$\omega_1 x + \omega_2 y.$$

Wir erhalten so:

$$a x^2 + b x y + c y^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y).$$

Nun interessiert uns in der Zahlentheorie weniger die einzelne Form als die ganze Klasse von Formen, welche durch die Substitutionen

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned} \right\} \alpha \delta - \beta \gamma = +1$$

verbunden sind. Bei dieser Substitution erleiden auch die Perioden eine Umänderung.

Es wird nämlich

$$\omega_1 x + \omega_2 y = (\alpha \omega_1 + \gamma \omega_2) x' + (\beta \omega_1 + \delta \omega_2) y'.$$

Setzen wir dies gleich

$$\omega'_1 x' + \omega'_2 y'$$

so haben wir

$$\left. \begin{aligned} \omega'_1 &= \alpha \omega_1 + \gamma \omega_2 \\ \omega'_2 &= \beta \omega_1 + \delta \omega_2 \end{aligned} \right\} \alpha \delta - \beta \gamma = +1.$$

Die Perioden erfahren also eine Trans-

formation, welche wir als Transforma-  
mation erster Ordnung bezeichnen.

Sie entsteht aus der vorigen Transforma-  
tion für die Gitterkoordinaten  $x, y$  durch  
bloße Vertauschung von  $\beta$  und  $\gamma$ .

Durch den Vergleich mit der Zahlen-  
theorie werden wir so darauf geführt,  
diese Transformationen erster Ordnung  
principiell in die Betrachtung einzuf-  
ühren und solche Functionen zu su-  
chen, welche nicht nur bei den Substi-  
tutionen un geändert bleiben.

$$n' = n + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$$

(also schlechtweg doppelperiodisch  
sind) sondern auch bei den Perioden-  
transformationen

$$\left. \begin{aligned} \omega_1' &= \alpha \omega_1 + \gamma \omega_2 \\ \omega_2' &= \beta \omega_1 + \delta \omega_2 \end{aligned} \right\} \alpha \delta - \beta \gamma = +1.$$

Diese Functionen nennen wir nun  
elliptische Functionen, so dass die  
elliptischen Functionen durch die vor-  
stehende ternäre Gruppe definiert  
sein sollen. Der Inbegriff aller  
solcher Functionen soll - vorbe-

haltlich einer späteren Verschärfung des Begriffes, und unbeschadet späterer Verallgemeinerungen - ein elliptisches Gebilde heissen. Der einzelnen Klasse quadratischer Formen tritt also ein elliptisches Gebilde an die Seite.

Nehmen wir im Speciellen die Coefficienten  $a, b, c$  der Form als ganze Zahlen an, so tritt der besondere Fall ein, dass jedesmal eine endliche Anzahl ( $h$ ) von Klassen zusammengehört, dass sind die Klassen der gleichen Discriminante  $D$ . Dementsprechend gibt es dann auch  $h$  zusammengehörige elliptische Gebilde. Wir nennen diese Gebilde, - also diejenigen, die zu ganzzahligen quadratischen Formen gehören - , singuläre elliptische Gebilde. Unser besonderes Interesse wird sein, zu untersuchen, wie sich diese singulären Gebilde von den allgemeinen elliptischen Gebilden unterscheiden und wie sich ihre zahlentheoretische Zusammengehörigkeit analytisch aus-

eine sog. elliptische Modulfunction oder Modulform haben, werden wir auf die vorstehende Gleichung wiederholt zurückkommen.

Zunächst wollen wir die einfachsten Repräsentanten der elliptischen Functionen aufstellen. Wir stellen uns also die Aufgabe, Invarianten unserer ternären Gruppe aufzufinden. Allgemein wird man dieses folgendermassen bewerkstelligen: Man geht von irgend einem Ausdruck in den  $u, w_1, w_2$  aus, transformirt diesen mittelst aller Substitutionen der Gruppe und bildet eine symmetrische Function aller so erhaltenen Ausdrücke. Ist die Gruppe eine endliche, so hat dieses keine Schwierigkeit. Ist aber, wie in unserem Falle, die Gruppe unendlich, so muß man die Convergence im Auge haben.

Gehen wir speciell von einer Potenz von  $u$  aus,  $u^r$ , so erhalten wir nach dem angegebenen Verfahren eine Invariante der Gruppe in dem folgen-



den Ausdruck:

$$\sum_{(m_1, m_2)} (u - m_1 w_1 - m_2 w_2)^r,$$

wo  $m_1, m_2$  alle Zahlen zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  durchlaufen. In der That erkennt man, dass bei sämtlichen Substitutionen unserer Gruppe die Glieder der Reihe nur untereinander verstellt werden. Ausserdem ist dieser Ausdruck homogen vom  $r$ ten Grade. Der Convergenz wegen aber müssen wir festsetzen, dass  $r \geq 3$  genommen werde (vergl. die folgenden Ausdrücke für  $p_1, q_2$  und  $g_3$ ). Soll aber  $r > 3$  genommen werden, so müssen wir die Reihe erst durch Hinzufügung passender Glieder convergent machen. (vergl. die folgende Gleichung für  $p$ ). In diesem Sinne ist die Darstellung der elliptischen Functionen von Eisenstein begonnen und von Weierstrass weiter ausgebildet worden. Die fundamentalen Functionen der Weierstrassischen Theorie sind die folgenden:

$$p(u, u_1, u_2) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[ \frac{1}{(u - m_1 u_1 - m_2 u_2)^2} - \frac{1}{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2} \right]$$

$$p'(u, u_1, u_2) = -2 \sum' \frac{1}{(u - m_1 u_1 - m_2 u_2)^3}$$

$$g_2(u_1, u_2) = 60 \cdot \sum' \frac{1}{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^4}$$

$$g_3(u_1, u_2) = 140 \sum' \frac{1}{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^6}$$

Diese Ausdrücke sind in unserer Terminologie elliptische Formen vom Gegr. -2, -3, -4, -6<sup>ten</sup> Grade. Es zeigt sich, dass man die ähnlich gebildeten Summen von kleinerem  $\nu$  auf die vorstehenden zurückführen kann.

Zwischen  $p$ ,  $p'$ ,  $g_2$  und  $g_3$  bestehen die folgenden Relationen:

$$p' = \frac{dp}{du}, \quad p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3.$$

Aus  $g_2$  und  $g_3$  bilden wir noch eine weitere wichtige elliptische Form  $\Delta$ , welche in der Weierstrassischen Theorie zurücktritt und nur gelegentlich unter der Bezeichnung  $G$  vorkommt. Man wird auf dieselbe

geführt, wenn man die rechte Seite der letzten Gleichung in Factoren zerlegt:

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 4(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)$$

und die Discriminante der Gleichung

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 0$$

bildet. Die neue Grösse  $\Delta$  ist bis auf einen Zahlenfactor gleich dieser Discriminante:

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2 = g_2^3 - 27g_3^2 = 16G.$$

Hiernach wird  $\Delta$  eine elliptische Form vom Grade -12. Endlich bilden wir noch eine elliptische Function (Form 0<sup>ter</sup> Grades) oder, wie man in der Invariantentheorie sagt, eine absolute Invariante, indem wir setzen:

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \text{ oder was dasselbe ist,}$$

$$J - 1 = \frac{27g_3^2}{\Delta}.$$

Unsere bisherige Definition der elliptischen Functionen, als Invarianten der ternären Gruppe, welche in ihren 3 Argumenten homogen sind, war

nur eine vorläufige. Wir bemerken nämlich, dass unter jene Definition auch Functionen fallen, welche als Functionen von  $w, w_1, w_2$  alle möglichen Arten von Singularitäten haben. Wollen wir dieses ausschliessen, so müssen wir unsere Definition verengern. Wir sagen daher jetzt: Wir verstehen fortan unter einer elliptischen Function nur eine rationale Function von  $p, p', p_2$  und  $g_3$ , welche überdies der Homogenitätsregel Genüge leidet. (Dass eine solche Function auch die oben geforderte Invarianteneigenschaft besitzt, versteht sich von selbst).

Dementsprechend verengern wir auch die frühere Definition des elliptischen Gebildes: Wir verstehen fortan unter dem elliptischen Gebilde die Gesamtheit der rationalen Functionen von  $p, p', g_2, g_3$ .

Dieser Begriff deckt sich daher mit dem Begriffe eines Rationalitätsbereiches. In unserem Falle ist der

Rationalitätsbereich festgelegt durch die Grössen  $p, g_2, g_3$  zu welchen noch die Grösse  $p'$  als Wurzel der Gleichung  $p'^3 - 4p^3 - g_2 p - g_3$  adjungiert ist.

Wir werden jedoch neben dieser indirecten Definition der elliptischen Functionen eine independente Definition fordern, welche nicht auf die Darstellung derselben durch die  $p$  und  $p'$  ... zurückgreift. Zu dem Zwecke müssen wir uns zunächst die Bedeutung des Periodenparallelogramms noch klarer machen.

Das Periodenparallelogramm war ursprünglich vom gruppentheoretischen Standpunkte definiert. Es war der Inbegriff aller nichtäquivalenten Punkte der  $u$ -Ebene, d. h. derjenigen Werte, welche durch keine Substitution  $u' = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$  zusammenhängen. Das Periodenparallelogramm misst sonach die Discontinuität der Gruppe, es ist ihr Discontinuitätsbereich.

Betrachten wir es jetzt vom functionentheoretischen Standpunkte: In dieser Hin-

sicht wissen wir, dass eine doppelperiodische Function  $\varphi$ , welche zu dem Periodenparallelogramm gehört, in jedem Parallelogramm der Gitterteilung genau die selben Werte annimmt, wie in jedem anderen. Das Periodenparallelogramm erschöpft also alle Werte, deren die Function  $\varphi$  fähig ist; es stellt ihren Fundamentalbereich dar.

Die beiden Begriffe: Discontinuitätsbereich der Gruppe und Fundamentalbereich der doppelperiodischen Functionen fallen eben nothwendig zusammen.

Eine weitere Frage wird sein, wie oft eine doppelperiodische Function einen vorgegebenen Werte im Fundamentalbereiche annimmt. Man überzeugt sich insbesondere, dass  $\rho$  jeden Werth an 2 Stellen,  $\rho'$  jeden Werth an 3 Stellen des Periodenparallelogramms annimmt. Man zeigt ferner, dass das Wertepaar  $(\rho, \rho')$  jeden Werth im Periodenparallelogramm nur an einer Stelle annimmt (wobei natürlich nur solche Werte in Betracht kommen, wcl.

Alle vermöge der Relation

$$p_0^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$$

überhaupt möglich sind)

Wenn wir das Wertepaar  $p, p'$  betrachten wollen, so werden wir uns die Abhängigkeit von  $p$  und  $p'$  durch eine Riemann'sche Fläche vorstellen u. zw. können wir entweder über der  $p$ -Ebene, den zwei zugehörigen Werten von  $p'$  entsprechend, eine zwei-blättrige Riemann'sche Fläche construiren, oder über einer  $p'$ -Ebene, den 3 Werten von  $p$  entsprechend, eine drei-blättrige Fläche ausbreiten. Die eine oder die andere Fläche ist, dem Vorstehenden zufolge, eindeutig auf das Periodenparallelogramm bezogen. Das Periodenparallelogramm ist einfach das conforme Abbild der zwei- (oder drei-) blättrigen Riemann'schen Fläche.

Frei. d. 14. II. Jetzt ist es leicht, von der obigen indirecten zu einer directen Definition der elliptischen Functionen überzugehen, d. h. zunächst, soweit die Variable  $u$  in Betracht kommt. Indem wir

sagten: die elliptischen Functionen sind rationale Functionen von  $p$  und  $p'$ , characterisirten wir sie durch ihr Verhalten auf der Riemann'schen Fläche  $(p, p')$ . Eine rationale Function ist nämlich, functionentheoretisch gesprochen, eine solche, welche nirgends wesentlich singular ist, oder auch eine solche, welche jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annimmt. Unsere frühere Definition besagt also, dass die elliptischen Functionen auf der Riemann'schen Fläche  $(p, p')$  keine wesentlichen Singularitäten haben oder, was dasselbe ist, dass sie jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen erreichen. Diese Eigenschaft überträgt sich nun aber sofort auf das Periodenparallelogramm. Wir können daher, was das  $u$  angeht, die folgende unabhängige Definition aufstellen.

Eine elliptische Function ist eine solche homogene Invariante der ternären Gruppe, welche im Perioden



parallelogramm der  $u$ -Ebene keine wesentliche Singularität besitzt oder jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annimmt.

Damit ist unsere Definition aber noch nicht vollständig. Die elliptischen Functionen sind doch Functionen von 3 Argumenten  $u, \omega_1, \omega_2$ . Während durch das Vorstehende ihre Abhängigkeit von der Variablen  $u$  präcisirt ist, bleiben uns jetzt noch ihre Eigenschaften in den  $\omega_1, \omega_2$  zu charakterisiren. Functionen, welche sich betreffs der Variablen  $u$  in der angegebenen Weise verhalten, sind rationale Functionen von  $p$  und  $p'$ . Die Coefficienten dieser rationalen Functionen hängen ihrerseits von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ab; sie sind nach unserer obigen Bezeichnung Modulformen  $\phi(\omega_1, \omega_2)$  und genügen der Functionalgleichung

$$\phi(2\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \phi(\omega_1, \omega_2).$$

Diese Gleichung ist aber zur Defi-

nition der Modulformen noch nicht aus-  
 reichend; sie entspricht hinsichtlich der Va-  
 riablen  $w_1, w_2$  nur der allgemeinen For-  
 derung, welche wir vorher hinsichtlich  
 der Variablen  $u$  aufstellten, wonach  
 die elliptischen Functionen in  $u$  doppelt  
 periodisch sein sollten. Es müssen viel-  
 mehr noch Einschränkungen hinsichtlich  
 des functionentheoretischen Charakters  
 der Modulformen hinzutreten, entspre-  
 chend dem Umstande, dass wir vor-  
 her in der Variablen  $u$  das Auftre-  
 ten von wesentlichen Singularitäten  
 im Periodenparallelogramm ausschlo-  
 sen. Dies geschah bereits oben durch  
 die Festsetzung, dass die elliptischen  
 Functionen auch von den  $g_2, g_3$  ratio-  
 nal abhängen sollten. Die Frage muss  
 wieder sein, wie sich diese Bedingung  
 independent ausdrückt, wenn wir  
 $w_1, w_2$  als unabhängige Variable  
 festhalten. Zu dem Zwecke beschrän-  
 ken wir uns zuvörderst auf Modul-  
 functionen im engeren Sinne, also  
 auf Modulformen  $g$ -Grades. Die

selben sind direct Functionen von  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$  und genügen als solche nach sq. 303 der Gleichung:

$$\phi(\omega) = \phi\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right).$$

Andererseits werden sie rationale Functionen nicht nur von  $g_2, g_3$ , sondern direct von der absoluten Invariante  $\mathcal{J}$  sein.

Wir verlegen jetzt die Betrachtung in die Ebene der Variablen  $\omega$ . Wie zerlegt sich diese Ebene entsprechend den Substitutionen

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}$$

in Discontinuitätsbereiche? Wie verhält sich  $\mathcal{J}$  im einzelnen Discontinuitätsbereiche? Und wie verhält sich eine beliebige rationale Function von  $\mathcal{J}$ ?

Haaben wir dieses erledigt, so müssen wir noch ein besonderes Verfahren angeben, um von den Modulfunctionen zu den allgemeineren Modulformen eines von Null verschiedenen Grades aufzusteigen.

Bei der Frage nach dem Discontinuitätsbereiche der  $w$ -Ebene knüpfen wir an die Theorie der quadratischen Formen an, womit wir die damals abgeleiteten Resultate jetzt direct benutzen können. Nach pg. 299 oben ist das Feindverhältnis  $w = \frac{w_1}{w_2}$  Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$aw^2 + bw + c = 0.$$

Da  $a, b, c$  die Coefficienten einer definiten quadratischen Form sind, werden die beiden Wurzeln conjugirt imaginär. Wir schreiben deshalb  $D = -\Delta$  und bezeichnen die Wurzel mit positivem bez. negativem imaginären Bestandtheil durch  $w$  bez.  $\bar{w}$ :

$$w = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \bar{w} = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Wir betrachten jetzt die Ebene  $a: b: c$  und die  $w$  Ebene neben einander. Nach den vorstehenden Formeln gehört zu jedem Punkte der ersten Ebene ein Punktepaar der zweiten Ebene. Setzen wir  $w = x + iy$  und entsprechend  $\bar{w} = x - iy$ , so dass

$x$  und  $y$  rechtwinklige Coordinaten in der  $w$  Ebene bedeuten, so bestimmt sich die Lage unseres Punktepaars durch die Gleichungen:

$$x = \frac{-b}{2a}, \quad y = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Die beiden Punkte des Paares sind hiernoch reell nur dann, wenn  $\Delta > 0$ , wenn also der Punkt  $a, b, c$  im Innern des fundamentalen Kegelschnitts liegt; sie fallen zusammen, wenn  $a, b, c$  auf den Rand rückt; sie werden imaginär, wenn der Punkt  $a, b, c$  sich ausserhalb des Kegelschnittes befindet.

Umgekehrt gehört zu jedem Punkte der  $w$ -Ebene ein bestimmter Punkt der Ebene  $a, b, c$ . Berechnet man nämlich nach den vorstehenden Formeln  $x^2 + y^2$ , so ergibt sich  $x^2 + y^2 = \frac{c}{a}$ , worauf man die folgende Proportion aufschreiben kann:

$$a : b : c = 1 : -2x : x^2 + y^2.$$

Dieselbe zeigt in der That, dass dem Punkte  $x, y$  ein ganz bestimmter Punkt  $a : b : c$  entspricht. Die Beziehung

zwischen der  $w$ -Ebene und der  $a, b, c$ -Ebene, so können wir sagen, ist eine ein-zweideutige Verwandtschaft.

Nun sind uns die Discontinuitätsbereiche in der  $a, b, c$ -Ebene, welche die Gruppe der  $(\alpha, \beta)$  Collineationen entwirft, wohlbekannt. Da wir ferner auch den Zusammenhang der  $a, b, c$ -Ebene mit der  $w$ -Ebene kennen, so werden wir jetzt die Gestalt der Discontinuitätsbereiche aus jener in diese Ebene umsetzen können. Hierzu dienen folgende Bemerkungen:

1. Dem fundamentalen Kegelschnitt der  $a, b, c$ -Ebene entspricht die reelle Axe der  $w$ -Ebene, denn  $D = 0$  ergibt nach pg. 317  $y = 0$ .

2. Den Geraden der  $a, b, c$ -Ebene entsprechen in der  $w$ -Ebene Kreise, welche ihren Mittelpunkt auf der reellen Axe haben und diese also senkrecht schneiden, denn aus der Gleichung  $Aa + Bb + Cc = 0$  entsteht vermöge der obigen Proportion:

$$A - 2Bx + C(x^2 + y^2) = 0.$$

3. Den  $(\alpha\beta)$ -Collineationen in der Ebene  
cu: b: c, welche den fundamentalen  
Kegelschnitt in sich transformiren, ent-  
sprechen in der w-Ebene Kreisverwandt-  
schaften, welche die reelle Axe ungerän-  
dert lassen. Dabei werden Kreise, wel-  
 che die reelle Axe senkrecht schneiden,  
 in ebensolche übergeführt. U. zw. ver-  
 schieden Kreisverwandtschaften, welche  
 den Collineationen  $\alpha\beta\gamma = +1$  ent-  
 sprechen, die reelle Axe gleichstim-  
 mig in sich; sie führen die positive  
 w-Halbebene in die positive über;  
 dagegen verschieben diejenigen Kreis-  
 verwandtschaften, welche aus den  
 Collineationen  $\alpha\beta\gamma = -1$  hervor-  
 gehen, die reelle Axe un-  
 gleichstimmig in sich; sie vertaus-  
 chen die positive mit der negati-  
 ven Halbebene:

4. Die imaginären Tangenten des fun-  
damentalen Kegelschnittes, welche  
von den Punkten des Kegelschnitt  
inneren auslaufen, verwandeln  
sich in die Minimallinien, welche

von den reellen Punkten der  $w$ -Ebene  
ausgehen. (Wir denken uns hier also  
 vorübergehend die  $a, b, c$  und eben  
 so die  $x, y$  der  $w$ -Ebene selbst als  
 complexer Werthe fähig). Sei näm-  
 lich  $a, b, c$  irgend ein Punkt im In-  
 nern des Kegelschnittes. Die Berüh-  
 rungspunkte der von ihm ausge-  
 henden Tangenten haben Parameter-  
 werthe  $w$ , welche der Gleichung ge-  
 nügen  $a_0 w^2 + b_0 w + c_0 = 0$ . Sei  $w_0$  ei-  
 ne Wurzel dieser Gleichung, so lau-  
 tet die Gleichung der zugehörigen  
 Tangente  $a w_0^2 + b w_0 + c = 0$ , wo  
 $a, b, c$  die laufenden Coordina-  
 ten der Tangente sind. Dem varia-  
 beln Punkte  $a, b, c$  entspreche in  
 der  $w$ -Ebene der variable Wert  $w$ ,  
 wobei  $a w^2 + b w + c = 0$ . Wir haben  
 ersichtlich:  $w = w_0$ , oder, wenn wir  
 ausführlich setzen  $w = x + iy$ ,  $w_0 =$   
 $x_0 + iy_0$ :  $x + iy = x_0 + iy_0$ . Hier gel-  
 ten  $x, y$ , wie wir schon andeuteten,  
 selbst als complexer Werte fähig.  
 Unter dieser Voraussetzung haben



wir die Gleichung einer Minimalgeraden der  $w$ -Ebene, welche durch den reellen Punkt  $x_0, y_0$  hindurchgeht. Ebenso entspricht der zweiten Tangente im Punkte  $a_0, b_0, c_0$  die zweite Minimalgerade durch  $x_0, y_0$ .

5. Der Winkel, unter dem sich zwei Curven in der  $a, b, c$ -Ebene schneiden, gemessen im Sinne der Cayley'schen Maassbestimmung, ist gleich dem Winkel, unter dem sich die entsprechenden beiden Curven in der  $w$ -Ebene treffen, gemessen im elementaren Sinne. Der Cayley'sche Winkel war definit durch  $\frac{1}{2}$  multiplicirt mit dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die beiden gegebenen Richtungen mit den Tangenten an den fundamentalen Kegelschnitt bilden. Nun ist unsere Beziehung zwischen der  $a, b, c$ - und der  $w$ -Ebene allerdings keine projective, bei der das Doppelverhältniss schlechtweg un-geändert bleibt. Indessen ist im Infinitesimalen eine jede Punkt:

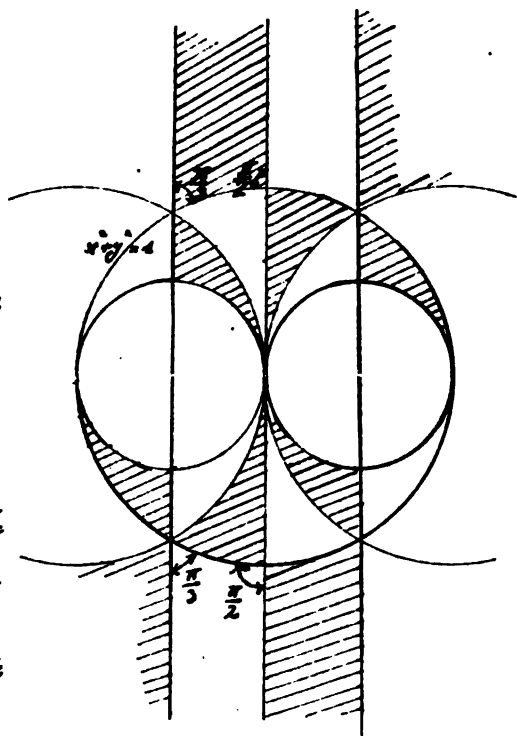
transformation eine projective Beziehung. Bei der Messung des Winkels kommt es aber nur auf das Verhalten der Linienelemente im Schnittpunkte an. Das Doppelverhältnis jener 4 Richtungen in der  $a, b, c$  Ebene wird daher gleich dem Doppelverhältnis der 4 entsprechenden Richtungen in der  $w$ -Ebene, d. h. der den gegebenen Curven entsprechenden Richtungen und der beiden Minimallinien durch ihren Schnittpunkt. Der Logarithmus dieser Grösse ist aber, noch multipliziert mit  $\frac{1}{2}$ , direct gleich dem elementar gemessenen Winkel.

Do. d. 20. II. Hiernach ist es leicht, die ganze Dreiecksfigur aus der  $a, b, c$ -Ebene in die  $w$ -Ebene zu übertragen. Wir grenzen zunächst dasjenige Gebiet ab, welches dem schraffirten Elementardreieck des reducirten Raumes aus unserer Dreiecksfigur entspricht. Dieses hatte zu Seiten die Geraden  $a = b, b = c, a = c$ .

Nach der Proportion von pg 317 sind die entsprechenden Linien der  $w$ -Ebene durch die Gleichungen gegeben:

$$x = -\frac{1}{2}, \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 1;$$

sie grenzen in der  $w$ -Ebene zwei spiegelbildlich glückliche Kreisbogen-dreiecke ab, das eine in der positiven, das andere in der negativen Halbebene gelegen. Die dem Winkel dieses Kreisbogen-dreiecks betragen, wie die Figur zeigt, bez.  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$  und  $0$ .



Dieselben Winkel besitzt, wie es sein muss, unser geradliniges Dreieck in der  $a, b, c$ -Ebene bei Cayley'scher Bauart.

Bestimmung.

Man entstand die ganze Dreiecksfi-  
gure aus dem reducirten Dreiecke da-  
durch, dass wir auf dieses die Opera-  
tionen der Gruppe  $\alpha \cdot \beta \gamma = \pm 1$  ausüb-  
ten. Dieselben Operationen üben wir auf  
eines der beiden Kreisbogendreiecke, et-  
wa auf das in der positiven Halbbe-  
ne gelegene aus. Dabei entstehen noch  
2) und 3) pag 318 und 319 unendlich  
viele Abbilder unseres Kreisbogen-  
dreiecks u. zw. liegen bei den Opera-  
tionen von der Determinante  $+1$  die  
sämmlichen Abbilder in der posi-  
tiven, bei denen von der Determinante  
 $-1$  in der negativen Halbebene. Aber es  
bleiben noch neben jedem so erhalte-  
nen Dreiecke Gebiete frei.

Beispielsweise können wir zu  
dem Spiegelbilde des anfänglichen  
Dreiecks in der negativen Halbbe-  
ne nicht hingelangen. Überhaupt  
bleiben alle solche und nur solche  
Gebiete frei, welche Spiegelbilder  
der bisher construirten Kreisbo-

gendreiecke in bezug auf die reelle Achse sind. Wir wollen alle bisher konstruierten Gebiete schraffieren und die bisher frei gebliebenen unbeschrafft lassen.

Die Spiegelung an der reellen Achse bedeutet die Operation  $x' = x, y' = -y$  bez.  $w' = \bar{w}$ . Setzen wir diese Operation mit einer Operation der  $(\alpha \beta)$  Gruppe zusammen, so ergibt sich:

$$w' = \frac{\alpha \bar{w} + \beta}{\gamma \bar{w} + \delta}$$

Durch alle Operationen dieser Art wird das Ausgangsdreieck successiv in alle bisher frei gebliebenen Gebiete verwandelt.

Wir sprechen von der „erweiterten“ Gruppe, wenn wir gleichzeitig die Operationen

$$I.) w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, w = \frac{\alpha \bar{w} + \beta}{\gamma \bar{w} + \delta}, \alpha \delta - \beta \gamma = \pm 1$$

betrachten. Sie enthält als Untergruppen

$$II.) w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}; \alpha \delta - \beta \gamma = \pm 1$$

$$\text{III)} \omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \omega' = \frac{\alpha\bar{\omega} + \beta}{\gamma\bar{\omega} + \delta}, \alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

und als fernere Untergruppe:

$$\text{IV)} \omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

Man bemerke wohl, dass das Wort „erweiterte Gruppe“ hier in anderem Sinne gebraucht ist, wie bei den Betrachtungen in der  $a, b, c$ -Ebene. Die Erweiterung, welche wir soeben vornahmen, hat in der  $a, b, c$ -Ebene keinen Sinn; denn die Operation  $x' = x, y' = -y$  bedeutet dort, wie aus der Proportion von pg. 317 hervorgeht, einfach die Identität.

Auch die Schraffur haben wir in der  $w$ -Ebene anders eingerichtet, als in der  $a, b, c$ -Ebene. Es entsprechen nämlich die schraffierten Gebiete der positiven Halbebene den schraffierten, die schraffierten Gebiete der negativen Halbebene den nicht schraffierten Gebieten der  $a, b, c$ -Ebene. Dasselbe gilt für die nicht-schraffierten Gebiete der  $w$ -Ebene. Der Grund

für diese Discordanz liegt darin,  
dass die Beziehung zwischen der  $\alpha, \beta, \gamma$ -  
und der  $w$ -Ebene eine ein-zweideu-  
tige Verwandtschaft ist.

Das Resultat dieser Überlegungen  
ist folgendes: (wegen der genaueren  
Begründung verweisen wir auf "Ho-  
dulf". Bd. I pg 112 und 113):

Unser ursprüngliches Kreisbogendre-  
eck bildet den Discontinuitätsbereich  
der erweiterten Gruppe (I) für die  
ganze  $w$ -Ebene. Gleichzeitig liefert  
es den Discontinuitätsbereich der Un-  
tergruppe III für die positive Halb-  
ebene. Dagegen bildet unser schraf-  
firtes Ausgangsdreieck zusammen  
mit einem anliegenden nichtschraf-  
firten Dreieck den Discontinuitäts-  
bereich der Untergruppe II für das  
Gebiet der ganzen Ebene, den der  
Untergruppe IV für das Gebiet der  
positiven Halbebene.

Die so eingeteilte  $w$ -Ebene wird  
das geometrische Substrat sein, in  
welchem wir die elliptischen Ho-

dulfunktionen studiren. Hinsichtlich  
 des hiermit besprochenen Überganges  
 zur  $w$ -Ebene bemerken wir jedoch noch  
 Folgendes: An sich wäre es für unse-  
 re functionentheoretischen Zwecke gar  
 nicht nötig gewesen, unsere geradlinige  
 Figur in eine Kreisbogenfigur um-  
 zusetzen. Es geschieht dieses nur aus  
 Connivenz gegen unsere Gewöhnung,  
 indem wir uns eine complexe Größe ger-  
 ne in der Gaussischen Weise durch die  
 rechtwinklichen Coordinaten eines Punk-  
 tes repräsentirt denken. Im Grunde giebt  
 aber auch unsere Dreiecksfigur eine völlig  
 zureichende geometrische Darstellung des  
 Complexen, da doch jeder complexe  
 Wert von  $w$  einem ganz bestimmten  
 Punkte im Innern des Kegelschnittes zu-  
 geordnet ist, nämlich demjenigen  
 Punkte, von welchem die Tangente  
 mit dem Parameter  $w$  an den fun-  
 damentalen Kegelschnitt gelegt  
 werden kann. Wir brauchen uns  
 dieses Innere nur mit zwei Blät-  
 tern überdeckt zu denken, um



denselben Vortheil zu haben, den wir durch die Unterscheidung der positiven und negativen Halbebene  $w$  erreichen. Uebrigens ist dieses doppelt überdeckte Kegelschnittinnere nur ein specieller Fall der allgemeinen zu den ebenen algebraischen Curven gehörigen „projectiven“ Riemann'schen Flächen, deren functionen theoretische Verwendung ich längst in Vorschlag gebracht habe. (Cfr. Vorl. über R. Fl. I pg 255).

Wir gehen nun zur Betrachtung der Modulfunctionen über. Zunächst genügt jede Modulfunction  $\varphi(w)$  der Functionalgleichung:

$$\varphi(w) = \varphi\left(\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}\right), \text{ wo } \alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

Daraus folgt: Für unsere Modulfunctionen ist jeder Discontinuitätsbereich der Gruppe  $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$  Grundamentraum; d. h. die Modulfunctionen nehmen in jedem Discontinuitätsbereich der Gruppe dieselben Werte an, wie in jedem anderen. Fr's

Besondere nehmen sie auch in correspondirenden Randpunkten des selben Bereiches die gleichen Werte an. Gewöhnlich wählt man unter den sämtlichen möglichen Fundamentalbereichen den auf der pg 331 gezeichneten aus. Derselbe besteht aus dem schraffirten Ausgangsdreieck von pg. 323 und dem längs der imaginären Axe sich anlegenden Neben-dreiecke. Die Anordnung der Randpunkte ist durch Pfeile angedeutet; sie wird durch die Substitutionen vermittelt =  $w = w' + 1$  und  $w' = -\frac{1}{w}$ .

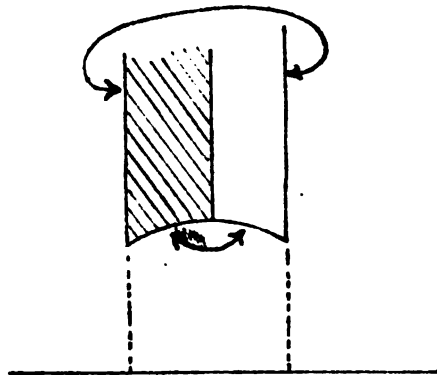
Unter den Modulfunctionen betrachten wir zunächst die Function  $F(w)$  genauer. Wir deuten uns ihre Werte in einer  $F$ -Ebene und fragen nach der Beziehung zwischen dieser und dem Fundamentalbereich der  $w$ -Ebene. Die Theorie der Modulfunctionen lehrt (vergl. H. F. I. pg 114), dass diese Beziehung eine eindeutig umkehrbare ist, oder, anders ausgedrückt, dass  $F(w)$  jeden

seiner Werte im Fundamentalbereiche einmal und nur einmal annimmt.

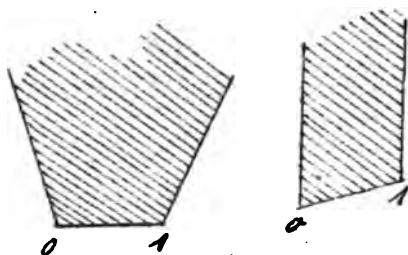
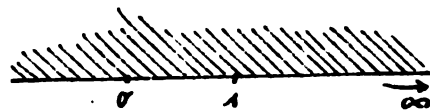
Wir vergleichen dieses Resultat mit dem, was wir früher über den Fundamentalraum der Gruppe  $w' = w + m, w + m\omega_1, w + m\omega_2$  d. h. über das Periodenparallelogramm abgeleitet haben.

Wir sehen, dass dieses geradezu ein conformes Abbild der Riemann'schen Fläche  $(\rho, \rho')$  war. Hier können wir entsprechend sagen: Der Fundamentalraum der  $\omega$ -Ebene ist ein conformes Abbild der schlichten  $\mathcal{F}$ -Ebene.

Die Dinge liegen also hinsichtlich der Variablen  $w$  im Grunde einfacher, als hinsichtlich der Variablen  $w$ . Speziell zeigt sich, dass das schraffierte Dreieck des Fundamentalbereiches ein conformes Abbild der positiven



$\mathcal{F}$ -Ebene ist, wo bei den Punkten  $\mathcal{F} = 0, 1, \infty$  die Eck-  
ken des Kreisbogen-  
gedreiecks ent-  
sprechen, nämlich  
bez. die Punkte, in  
denen die zusam-  
menstossenden  
Seiten die Winkel  
 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$  und  $0$  bil-



den. Wir können uns den Übergang von der  
positiven  $\mathcal{F}$ -Ebene zu dem Kreisbogen-  
dreieck in der  $w$ -Ebene wieder so den-  
ken, dass wir ihn als das Resultat ei-  
ner gesetzmässigen kontinuierlichen Ver-  
zerrung ansehen, wie durch die neben-  
stehenden Figuren angedeutet wird.

Wir sprechen jetzt von Modulfunkti-  
onen im Allgemeinen. Wir definierten die-  
se früher dadurch, dass wir sagten: es  
sind rationale Funktionen von  $\mathcal{F}$ .  
Dieses können wir auch so ausdrük-  
ken: die Modulfunktionen sind in  
der  $\mathcal{F}$ -Ebene eindeutig und haben

nirgends einen wesentlich singulären Punkt. Wir geben nun die in Aussicht genommene unabhängige Definition der Modulfunctionen, indem wir sie in der  $\mathcal{F}$ -Ebene characterisiren. Wir sagen: Modulfunctionen sind solche eindeutige Functionen von  $\omega$ , welche

1. die Functionalgleichung erfüllen

$$\varphi\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = \varphi(\omega),$$

und welche

2. im Innern des einzelnen Fundamentalbereiches relativ zu diesem Bereich keinen wesentlich singulären Punkt haben.

Der Ausdruck: relativ zum Fundamentalbereich muss dabei noch näher präcisirt werden. Er soll etwas Anderes bedeuten, wie wenn wir sagen würden: relativ zur  $\omega$ -Ebene: und deckt sich mit ihm nur im Allgemeinen, nämlich nur in solchen Punkten, wo der Fundamentalbereich selbst keine Besonderheiten aufweist. Um seine Bedeutung auch für die

Ecken festzulegen, müssen wir auf die  $\mathcal{F}$ -Ebene zurückgreifen, in welcher ja die Modulfunctionen schlechtweg keine wesentliche singuläre Stelle haben sollten. Nun bildet sich die Umgebung der Punkte  $\mathcal{F} = 0$  und  $\mathcal{F} = 1$  zwar nicht conform, aber doch mit rationalen Winkelvergrößerungsverhältniss auf die  $w$ -Ebene ab. Daraus folgt, dass auch in den Ecken unseres Dreiecks mit den Winkeln  $\frac{\pi}{3}$  und  $\frac{\pi}{2}$  das Auftreten von wesentlichen Singularitäten relativ zur  $w$ -Ebene schlechtweg ausgeschlossen werden muss. Anders verhält es sich mit derjenigen Ecke, welche sich in's Unendliche erstreckt.

Wir fragen zunächst, wie sich  $\mathcal{F}$  selbst in dieser Ecke verhält; gestattet  $\mathcal{F}$  hier eine Entwicklung nach aufsteigenden Potenzen von  $\frac{1}{w}$  mit nur einer endlichen Zahl negativer Potenzen? Das ist nicht der Fall, vielmehr hat  $\mathcal{F}$ , als Function von  $w$ , bei  $w = \infty$  eine wesentlich singuläre Stelle. Man beherrscht aber diese

Singularität, indem man sie durch Einführung einer neuen Variablenfortschaffen kann.

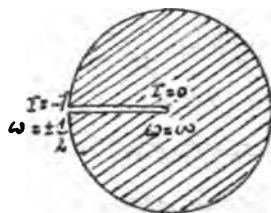
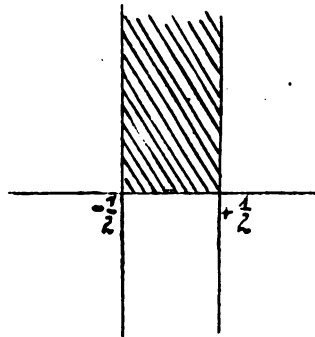
Diese Hilfsvariable ist

$$r = \rho^{2riw};$$

(es ist dieselbe Grösse, welche in der Jacobi'schen Bezeichnungsweise  $q^2$ , in der Weierstrass'schen  $h^2$  heisst.) Was zunächst

die Abbildung betrifft, welche in der  $w$ -Ebene entsteht, wenn  $r$  unter Vermeidung eines von  $r=0$  bei  $r=\infty$  längs der negativen reellen Ase laufen

den Schnittes alle seine Werte einmal durchläuft, so besteht diese aus einem Parallelstreifen, welcher durch die in den Punkten  $w = \pm \frac{\pi}{2}$  parallel zur imaginären Ase gezogenen Geraden begrenzt wird, u. zw. entspricht der in der positiven  $w$ -Ebene gelegene Halb-



streifen dem Inneren der in der negativen  $w$ -Ebene gelegene Halbstreifen dem Aeusseren des Einheitskreises in der  $r$ -Ebene. Das Unendliche des positiven Halbstreifens entspricht dem Mittelpunkte des Einheitskreises, d. h. dem Werte  $r = 0$ .

Man kann nun  $F(w)$  mittelst der Variablen  $r$  in eine Reihe entwickeln, welche folgendermassen lautet (vergl. N. F. I pg 154):

$$F = \frac{1}{1728 r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r r^r.$$

Aus dieser Reihe erkennen wir zweitens: erstlich, dass  $F$  für  $r = 0$  unendlich wird, und zweitens, dass es, als Function von  $r$  aufgefasst, nicht wesentlich singular ist.

Wir verlangen nun von den Modulfunctionen überhaupt, dass sie an der Stelle  $w = \infty$ , als Functionen von  $r$  aufgefasst, nicht wesentlich singular sein sollen, mithin nach aufsteigenden Potenzen von  $r$  entwickelt, nur eine endliche



Anzahl von negativen Potenzen von  $r$  besitzen dürfen. Dies meinen wir, wenn wir sagen: die Modulfunctionen sollen, „relativ zum Fundamentallbereiche“, auch an der Stelle  $w = \infty$  keine wesentliche Singularität haben. Uebrigens convergirt die angegebene Reihe für  $F$  für alle Werthe  $|r| < 1$  und gibt damit eine Darstellung des  $F$  in der ganzen positiven Halbebene  $w$ .

Frei. den 21. II. Längs der reellen Axe wird das Verhalten der Modulfunctionen ein sehr eigentümliches. Wenn wir nämlich unsere Einteilung der  $w$ -Ebene nach der reellen Axe hin vervollständigen wollen, so erkennen wir, dass sich hier die Kreisbogendreiecke unbegrenzt häufen. Daraus folgt, dass die Modulfunction hier jeden Wert an unendlich vielen unmittelbar benachbarten Stellen annimmt. Jeder Punkt der reellen Axe wird daher ein wesentlich singulärer Punkt der Function. Man kann die Frage aufwerfen: Welchen Wert nimmt denn eigent-

lich die Modulfunction an einem bestimmten Punkte der reellen Axe selbst an? Dabei müssen wir zwischen den rationalen und den irrationalen Punkten unterscheiden. In jeden rationalen Punkt läuft ein Kreisbogen dreieckförmig (und sogar eine unendliche Zahl solcher Dreiecke) je mit einer Spitze aus. Nähern wir uns einem rationalen Punkt, indem wir senkrecht auf die reelle Axe zuschreiten, so bleiben wir in einem bestimmten Fundamentalbereiche, wir können daher auch von einem bestimmten Werte sprechen, welchen die Modulfunction bei der bestimmten Art der Annäherung in diesem Punkte annimmt. Dagegen passiren wir, wenn wir auf einen irrationalen Punkt in irgend einer Richtung zuschreiten, fortgesetzt neue Dreiecke. Es gibt daher keinen bestimmten Grenzwert, dem die Function in einem solchen Punkte zustrebt; die Function bleibt hier völlig unbestimmt.

Dies hat im Sinne der Weierstrass's

schen Functionentheorie zur Folge, dass man die Modulfunctionen über die reelle Axe nicht fortsetzen kann, sie bilden historisch das erste Beispiel einer Function mit natürlicher Grenze.

Allerdings können wir, wenn uns irgend ein Ausdruck zur Berechnung einer Modulfunction gegeben ist, daraus möglicherweise ebensowohl Werte für ein  $\omega$  der positiven, wie für eins der negativen Halbebene ableiten. So ist es z. B. für  $d = 9_2^2$ , wenn wir für  $g_2^3$  und  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$  die oben gegebenen Partialbruchreihen einsetzen. Die so entstehenden Werte von  $\mathcal{F}$  gehören aber im Sinne der modernen Functionentheorie zu zwei ganz verschiedenen Functionen, welche nicht durch analytische Fortsetzung unter einander zusammenhängen. Hiernach stellt das Symbol  $\mathcal{F}(\omega)$  zwei verschiedene Functionen dar, von denen die eine in der positiven, die andere in der negativen Halbebene definiert ist. Ana.

log ist es mit allen unseren Modulfuncti-  
 onen. Wir werden weiterhin unter  $F(w)$   
 immer die erstere von beiden verstehen,  
 also voraussetzen, dass  $w = \frac{w_1}{w_2}$  einen  
 positiv-imaginären Restanttheil  
 hat. Dies bringt dann mit sich, dass  
 wir uns auf solche  $(\alpha, \beta)$  Substitutio-  
 nen beschränken müssen, deren De-  
 terminante = +1, denn die anderen  
 vertauschen die beiden Halbebenen  
 $a$  mit einander.

Wir beschäftigen uns nun mit den  
Modulformen. Diese sollten rationa-  
 le Functionen von  $g_2$  und  $g_3$  sein, wel-  
 che homogen sind, wobei wir  $g_2$  das  
 Gewicht - 4 und  $g_3$  das Gewicht - 6 bei-  
 zulegen hatten.  $g_2$  und  $g_3$  selbst, so-  
 wie die Discriminante  $\Delta$  sind die  
 einfachsten Modulformen. Ihre Dar-  
 stellung in den Variablen  $w_1, w_2$  wur-  
 de pg 306 mitgeteilt.

Wenn wir Functionen der beiden  
 unabhängigen Variablen  $w_1$  und  $w_2$   
 betrachten wollen, so liegt es zwör-  
 derst nahe, die Variablen in  $\mathbb{P}_2^1$

zu deuten. Hinsichtlich der Substitutions-  
engruppe:

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 \\ \omega_2' &= \gamma \omega_1 + \delta \omega_2, \quad \alpha \delta - \beta \gamma = +1 \end{aligned}$$

zerlegt sich dieser  $R_4$  in eine Reihe  
von Diskontinuitäts-Bereichen. Es wi-  
re nun die Frage, wie man die Modul-  
formen und ins Besondere, wie man  
 $g_2$  und  $g_3$  funktionentheoretisch durch  
ihre Verhalten in einem einzelnen die-  
ser Bereiche characterisiren könnte.

Dieser directe Weg zum Studium der  
Modulformen ist indessen bisher nicht  
mit Erfolg eingeschlagen worden, er  
scheint erhebliche Schwierigkeiten zu  
haben. Dasselbe ist aber auch nicht  
nötig, da wir nur homogene Func-  
tionen von  $\omega_1, \omega_2$  suchen. In Folge  
dessen können wir die ganze Un-  
tersuchung indirect in die  $\omega$ -Ebe-  
ne selbst verlegen. Wir geben zu-  
nächst ein Verfahren an, durch wel-  
ches man von  $\mathcal{F}(\omega)$  zu den For-  
men  $g_2$  und  $g_3$  aufsteigen kann.

Um dem Zweck betrachten wir den Differentialquotienten  $\frac{dF(w)}{dw}$  und sehen zu, wie sich derselbe bei den Substitutionen  $w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$  verhält. Zunächst haben wir die Gleichung:

$$F(w') - F(w).$$

Durch Differentiation folgt, da  $\frac{dw'}{dw} = \left(\frac{\gamma w + \delta}{\gamma w + \delta}\right)^2$  ist:

$$\frac{dF(w')}{dw'} \cdot \frac{1}{(\gamma w + \delta)^2} = \frac{dF(w)}{dw}$$

Multiplizieren wir hier mit  $\frac{1}{w_2^2}$  und berücksichtigen, dass  $w_2' = \gamma w_1 + \delta w_2$ , so haben wir

$$\frac{dF(w')}{dw'} \cdot \frac{1}{w_2'^2} = \frac{dF(w)}{dw} \cdot \frac{1}{w_2^2}$$

Wir sind somit zu einer Form  $\varphi(w_1, w_2) = \frac{dF}{dw} \cdot \frac{1}{w_2^2}$  gekommen, welche homogen vom 2-ten Grade in  $w_1, w_2$  ist und welche bei den Substitutionen von § 341 gänzlich ungeändert bleibt. Dieses  $\varphi$  wird daher als Modulform zu bezeichnen sein.

Es gelingt nun, mit Hilfe dieser

Form  $\varrho$  und der Function  $\mathcal{F}$  die anderen Modulformen zusammenzusetzen, wie die folgenden Formeln zeigen:

$$g_2 = \frac{\pi^2}{3\mathcal{F}(1-\mathcal{F})} \varrho^2$$

$$g_3 = \frac{\pi^3 i}{27\mathcal{F}^2(1-\mathcal{F})} \varrho^3$$

$$\Delta = \frac{\pi^4}{27\mathcal{F}^4(1-\mathcal{F})^3} \varrho^6.$$

(vergl. Hierzu H. F. S. 109).

Aus diesen Formeln können wir das Verhalten von  $g_2$ ,  $g_3$  und  $\Delta$  bei beliebigen Werten von  $w_1$  und  $w_2$  ablesen, wobei wir nur, wie es bei homogenen Variablen stets geschehen muss, das gleichzeitige Verschwinden sowie das gleichzeitige Unendlichwerden von  $w_1$  und  $w_2$  ausschliessen. Zunächst zeigt sich, dass alle 3 Grössen im Innern der  $w$ -Halbebene nirgends unendlich werden. Denn die Werte  $\mathcal{F} = 0$  und  $\mathcal{F} = 1$  sind, wie aus der Lagerung unserer Dreiecksteilung hervorgeht, dreifache bez. zweifache

Werte der Function  $F(w)$ . Daher verschwindet der Differentialquotient und also auch  $\varphi(w)$  an diesen Stellen von der zweiten bez. ersten Ordnung. Das Nullwerden des Nenners wird daher bei unseren Ausdrücken für  $g_2, g_3, \Delta$  durch das Nullwerden des Zählers aufgehoben, ja es bleibt für  $g_2$  und  $g_3$  bei  $F=0, 1$  noch je eine einfache Nullstelle übrig. Man erkennt auch aus der Dreiecksteilung, dass die genannten Stellen (die Ecken der Dreiecksteilung) die einzigen Nullstellen von  $\varphi(w)$  im Innern der Halbebene sind. Daraus ergibt sich die folgende Zusammenstellung (NB. für das Innere der Halbebene):

$g_2$  wird Null in den Ecken vom Winkel  $\frac{\pi}{3}$   
und nur in diesen  
 $g_3$  " " " " " vom Winkel  $\frac{\pi}{2}$   
und nur in diesen

$\Delta$  wird nirgends Null.

Insgleich sind sämtliche Nullstellen von  $g_2$  und  $g_3$  einfache Nullstellen.

Wir orientiren uns ferner über das



Verhalten unserer Formen in den rationalen Punkten der reellen Axe. Dabei können wir uns auf den Punkt  $\omega = \infty$  oder  $\omega_2 = 0$  beschränken, weil jeder andere rationale Punkt  $\omega = \xi/\zeta$  durch eine Substitution unserer Gruppe nach dem Punkte  $\omega = \infty$  transformirt werden kann, wobei die Modulform ungeändert bleibt. Wir führen, ebenso wie bei der Untersuchung von  $F$  im Punkte  $\omega = \infty$  die Hilfsvariable  $r = e^{2\pi i \omega}$  ein, man kann dann folgende Reihenentwickelungen aufstellen (vergl. H. F. I pg 153 und 154).

$$g_2\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 = \frac{1}{12} + 20 \sum \frac{m^3 + m}{1 - r^m}$$

$$g_3\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^6 = \frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum \frac{m^5 + m}{1 - r^m}$$

$$\Delta\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} = r \pi' (1 - r^m)^{24}$$

Do. den 27. II. Die rechten Seiten dieser Ausdrücke können wir uns für die Umgebung der Stelle  $\omega_2 = 0$  oder, was dasselbe ist, der Stelle  $r = 0$  in convergente Reihen nach steigenden Po.

tenzen von  $r$  ungeordnet denken; wir bezeichnen sie dementsprechend mit  $\Psi(r)$  und zwar bleiben diese  $\Psi(r)$  bei  $r = 0$  endlich. Dagegen werden die Grössen  $g_2, g_3, \Delta$  selbst bei der Annäherung an den Punkt  $\omega_2 = 0$  unendlich gross u. zw. wird die Art des Unendlich-Werdens allgemein zu reden genommen durch einen Ausdruck von der Form

$$\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \Psi(r).$$

Ganz analoges gilt von jedem rationalen Punkte  $\gamma \omega_1 + \delta \omega_2 = 0$  auf der reellen Ebene, wie wir nicht ausführen, da jeder solche Punkt durch eine Substitution  $(\alpha, \beta)$  nach  $\omega$  geworfen werden kann. Diese Eigenschaft überträgt sich sofort auf die Modulformen überhaupt, welche ja rationale Funktionen von  $g_2$  und  $g_3$  sein sollten, auch diese verhalten sich bei  $\omega_2 = 0$  wie  $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \Psi(r)$ , wo nun aber  $\Psi(r)$  eine endliche Zahl negativer Potenzen enthalten kann. Insbesondere werden wir die ganzen Modulformen bevorzugen, welche als

ganze rationale Functionen von  $g_2$  und  $g_3$  definiert sind. Wir sind jetzt in der Lage, dieselben independent durch ihr Verhalten im Fundamentalbereiche zu charakterisiren, ohne auf ihre Darstellung durch  $g_2$  und  $g_3$  zurückzugreifen. Unsere Definition wird lauten:

1. Die ganzen Modulformen  $\varphi(\omega_1, \omega_2)$  sind homogene Functionen von  $\omega_1$  und  $\omega_2$ . (Ihr Grad sei  $-r$ )

2. Sie erfüllen die Functionalgleichung:

$$\varphi(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \varphi(\omega_1, \omega_2).$$

3. Sie sind im Innern der positiven  $\omega$ -Halbebene nirgends singular, also überall endlich.

4. Sie verhalten sich bei der Annäherung an den unendlich fernen Gipfel des Fundamentalbereiches wie

$$\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \varphi(r),$$

wo in  $\varphi(r)$  nur positive Potenzen von  $r$  auftreten.

Umgekehrt schliesst man, dass eine Function, welche diesen Bedin.

gungen genügt, eine ganze rationale Function von  $g_2$  und  $g_3$  ist. Entdeckt sich also die neue Definition mit der früheren. Legt man Wert darauf, dass in den Reihenentwickelungen nach  $\tau$  nur ganze Potenzen als Coefficienten auftreten, so wird man nicht die Grössen  $g_2, g_3$  selbst, sondern  $f_2 = 12g_2$  und  $f_3 = 216g_3$  zu Grunde legen. Die Discriminante  $\Delta$  erfüllt die Forderung ganzzahliger Coefficienten von selbst; sie ist mit  $f_2$  und  $f_3$  durch die Gleichung verbunden:  $1728\Delta = f_2^3 - f_3^2$ . Von diesem Standpunkte aus empfiehlt es sich auch statt der absoluten Invariante  $J$  die Function  $J \cdot \frac{1}{\Delta^2} = 1728J$  einzuführen. Die ganzen ganzzahligen Modulformen im Allgemeinen werden wieder durch die Bedingungen 1) bis 4) definiert, wobei der 4. Bedingung hinzuzufügen ist, dass in der Reihe  $P(\tau)$  nur ganzzahlige Coefficienten auftreten. Man erkennt, dass diese ganzen ganzzahligen Modulformen ganze ganzzahlige Functionen von  $f_2, f_3$  und  $\Delta$  sind (welch'

letzteres sich hier selbstständig neben  $f_2$  und  $f_3$  stellt, da es sich aus  $f_2$  und  $f_3$  nur mit dem Nenner  $\sqrt{28} \sqrt{11}$  zusammensetzen lässt.)

Wir gehen nun auf die Bedeutung der elliptischen Functionen für unsern eigentlichen Gegenstand, für die Fraktionentheorie ein. Es handelt sich auschliesslich um negative Discriminanten. Wir unterscheiden dabei drei Stufen unserer bisherigen arithmetischen Entwicklungen:

1. Auf der obersten Stufe beschäftigen wir uns mit den Gitterzahlen, d. h. mit gewissen complexen Zahlen, welche den Eckpunkten eines beliebigen Parallelogramms in der Gaussischen Ebene zugeordnet sind. Sind  $\omega_1$  und  $\omega_2$  diejenigen complexen Zahlen, welche den Endpunkten der von 0 auslaufenden Seiten des ersten Parallelogramms zukommen, so ist die allgemeine Form der Gitterzahlen

$$\omega_1 x + \omega_2 y.$$

Die Bezeichnung wird praktischer Weise von vorne herein so eingerichtet, dass  $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  einen positiven imaginären Bestandtheil hat. Da die Definition der Gitterzahlen an die Punkte des Gitters, nicht an die Parallellinien desselben anknüpft, so wird man alle zu demselben Punktgitter gehörige Parallelgitter als gleichwerthig ansehen. Dementsprechend dass man alle Grössen  $\omega_1, \omega_2$  als gleichwerthig ansieht, welche mit  $\omega_1, \omega_2$  durch die Substitutionen verbunden sind.

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \alpha \omega'_1 + \beta \omega'_2 \\ \omega_2 &= \gamma \omega'_1 + \delta \omega'_2 \end{aligned} \right\} (\alpha\delta - \beta\gamma) = +1,$$

wobei wir uns auf die Det. +1 beschränken, damit die Vereinbarung betr. den imaginären Teil von  $\omega$  aufrecht erhalten bleibt.

2. Auf der zweiten Stufe betrachten wir die definiten quadratischen Formen, welche als Normen der Gitterzahlen definiert sind:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$$

Es sind dies insbesondere die positiven quadratischen Formen.

Den vorstehenden Substitutionsformeln entsprechend interessiert uns dabei weniger die einzelne Form, als die Klasse äquivalenter Formen.

3. Auf der dritten Stufe untersuchen wir nicht die quadratische Form, sondern die quadratische Gleichung:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \text{ bez. } a\omega^2 + b\omega + c = 0.$$

Bei diesem Standpunkte werden nicht die Zahlen  $a, b, c$  selbst, sondern nur die Verhältnisse  $a : b : c$  in Betracht gezogen.

Bei 1. kommt von unserem geometrischen Bilde die ganze Figur des Punktgitters nach Lage und Grösse zur Geltung. Bei 2. kommt es nur auf die Gestalt, nicht auf die Orientierung des Gitters an. Wenn wir nämlich das Punktgitter um  $O$  beliebig drehen, also  $e^{i\varphi}(\omega_1 x + \omega_2 y)$  an Stelle von  $\omega_1 x + \omega_2 y$  und entsprechend  $e^{-i\varphi}(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$  an Stelle

Beim Beweise dieser Behauptungen beginnen wir mit dem Falle 3). Wir wissen, dass  $F(w)$  in seinem Fundamentalbereiche jeden Werth nur einmal annimmt. In der  $w$ -Ebene hat daher  $F(w)$  denselben Werth nur für solche Punkte, welche an äquivalenten Stellen verschiedener Fundamentalbereiche liegen. Aus der Gleichung  $F(w) = F(w')$  folgt also  $w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$ . Die Punktgitter sind ähnlich, aber nicht notwendig ähnlich gelegen und gleich. Darauf stützen wir uns beim Beweise der Behauptungen ad 2) und 1). Wir haben jedenfalls:  $F\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = F\left(\frac{\omega'_1}{\omega'_2}\right)$ . Hieraus ergibt sich, wie wir sehen:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\alpha \omega'_1 + \beta \omega'_2}{\gamma \omega'_1 + \delta \omega'_2}$$

oder, homogen geschrieben:

$$\begin{cases} \rho \omega_1 = \alpha \omega'_1 + \beta \omega'_2 \\ \rho \omega_2 = \gamma \omega'_1 + \delta \omega'_2 \end{cases}$$

Nun ist aber

$$g_2(\rho \omega_1, \rho \omega_2) = \rho^{-4} g_2(\omega_1, \omega_2)$$



und

$$g_3(\varrho \omega_1, \varrho \omega_2) = \varrho^{-6} g_3(\omega_1, \omega_2);$$

ferner haben wir

$$g_2(\omega'_1, \omega'_2) = g_2(\alpha \omega'_1 + \beta \omega'_2, \gamma \omega'_1 + \delta \omega'_2) = g_2(\varrho \omega_1, \varrho \omega_2),$$

also

$$g_2(\omega'_1, \omega'_2) = \varrho^{-4} g_2(\omega_1, \omega_2)$$

und ebenso

$$g_3(\omega'_1, \omega'_2) = \varrho^{-6} g_3(\omega_1, \omega_2).$$

Im Falle 1.) lautet die Voraussetzung

$$g_2(\omega'_1, \omega'_2) = g_2(\omega_1, \omega_2) \text{ und}$$

$$g_3(\omega'_1, \omega'_2) = g_3(\omega_1, \omega_2). \text{ Daraus ergibt sich}$$

$$N(\varrho^2) = 1 \text{ oder } \varrho = \pm 1.$$

In diesem Falle sind die Periodenpaare direct äquivalent, w.zw., wenn  $\varrho = +1$ , mittelst der Substitution  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , wenn  $\varrho = -1$ , mittelst  $\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$ . Die Punktgitter sind also völlig identisch.

Im Falle 2.) setzen wir nun voraus

$$Ng_2(\omega'_1, \omega'_2) = Ng_2(\omega_1, \omega_2) \text{ und}$$

$$Ng_3(\omega'_1, \omega'_2) = Ng_3(\omega_1, \omega_2). \text{ Daraus}$$

folgt mit Rücksicht auf das Vorstehende:

$$N_{\varphi}^2 = 1, \text{ also } \varphi = \epsilon^{i\varphi}.$$

In diesem Falle sind die Periodenpaare  $\omega_1, \omega_2$  und  $\omega'_1, \omega'_2$  also bis auf die Orientierung äquivalent; Die Punktgitter sind der Gestalt nach identisch, nur der Lage nach sind sie eventl. gegen einander gedreht.

Wie man sieht, ist der eigentliche Kernpunkt dieser fundamentalen Sätze, dass  $F$  im Fundamentaltbereiche der  $w$ -Ebene jeden Werth gerade einmal annimmt (dass dieser Fundamentaltbereich direct eine eindeutige Abbildung der  $F$ -Ebene ist).

Frei. d. 28. II. Wir haben uns jetzt mit derjenigen systematischen Auffassung der elliptischen Functionen vertraut zu machen, welche in den Vorlesungen über Modulfunctio- nen entwickelt ist.

Die bisher betrachteten elliptischen Functionen waren definiert als Invarianten der Gruppe

$$u' = \alpha u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$$

$$\omega_1' = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2$$

$$\omega_2' = \gamma \omega_1 + \delta \omega_2,$$

welche relativ zu dem Discontinuitätsbereich der Gruppe keine wesentlichen Singularitäten besitzen. Wir erweitern jetzt die Theorie dahin, dass wir auch die Untergruppen dieser Gesamtgruppe in Betracht ziehen. Dabei aber soll es sich nur um Untergruppen von endlichem Index handeln. Wir suchen dann die eindeutigen, homogenen Invarianten dieser Untergruppen auf, welche relativ zu dem betr. Discontinuitätsbereiche keine wesentliche Singularität besitzen. Diese Invarianten sind elliptische Funktionen im weiteren Sinne. Während die bisherigen Funktionen rationale Funktionen von  $\wp, \wp', g_2$  und  $g_3$  waren, erweisen sich diese neuen Funktionen als algebraisch von  $\wp, \wp', g_2$  und  $g_3$  abhängig. Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dass alle algebraischen Funktionen

dieser Grössen elliptische Functionen seien, vielmehr entsteht die Frage, welche algebraischen Functionen von  $p, p', g_2$  und  $g_3$  als Invarianten einer unserer Untergruppen erhalten werden können. Wiederum kann man die ganzen algebraischen Functionen bevorzugen und kann die Forderung hinzufügen, dass nur ganzzahlige Coefficienten in ihren Entwicklungen auftreten sollen.

Die Theorie hat nun der Reihe nach folgende Aufgaben zu erledigen:

1. Alle Untergruppen der ternären Grupp.  $\Gamma$  aufzuzählen.
2. Die zugehörigen Discontinuitätsbereiche anzugeben.
3. Die Functionen zu bilden, welche die Discontinuitätsbereiche zu Fundamentalkreischen haben und relativ zu denselben keine wesentlichen Singularitäten besitzen.
4. Die algebraischen Beziehungen zu untersuchen, in welchen diese Functionen zu den  $p, p', g_2, g_3$  stehen.

Fich will mich hier, wie in den Vorle.

sungen" geschieht einen Augenblick auf Modulfunctionen, also die binäre Gruppe der  $\omega$ -Substitutionen beschränken. In dieser Hinsicht werde etwa Folgendes angeführt:

Von den Untergruppen sind die "Congruenzgruppen" am besten untersucht, das sind solche, welche aus der Gruppe

$$\omega_1 = \alpha \omega'_1 + \beta \omega'_2$$

$$\omega_2 = \gamma \omega'_1 + \delta \omega'_2$$

durch Congruenzen ausgeschieden werden, deren man die Coefficienten ihrer Substitutionen unterwirft. Specially bezeichnet man als "Hauptcongruenzgruppe  $r^{\text{ten}}$  Stufe" diejenige Gruppe deren Substitutionen modulo  $n$  der Identität congruent sind. Die Coefficienten ihrer Substitutionen genügen den Bedingungen

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv 0 \\ \gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv 1 \end{array} \right\} \pmod{n}.$$

Ein Beispiel für eine umfassendere

dieser Grössen elliptische Functionen seien, vielmehr entsteht die Frage, welche algebraischen Functionen von  $p, p', g_2$  und  $g_3$  als Invarianten einer unserer Untergruppen erhalten werden können. Wiederum kann man die ganzen algebraischen Functionen bevorzugen und kann die Forderung hinzufügen, dass nur ganzzahlige Coefficienten in ihren Entwicklungen auftreten sollen.

Die Theorie hat nun der Reihe nach folgende Aufgaben zu erledigen:

1. Alle Untergruppen der ternären Grupp.  $\rho e$  aufzuzählen.
2. Die zugehörigen Discontinuitätsbereiche anzugeben.
3. Die Functionen zu bilden, welche die Discontinuitätsbereiche zu Fundamentalkreischen haben und relativ zu denselben keine wesentlichen Singularitäten besitzen.
4. Die algebraischen Beziehungen zu untersuchen, in welchen diese Functionen zu den  $p, p', g_2, g_3$  stehen.

Ich will mich hier, wie in den Vor

sungen "geschichte einen über  
 Blick auf Modulfunctionen  
 Binäre Gruppe der  $\omega$ -Substitutionen  
 Beschränkten. In dieser Theorie  
 etwa Folgendes angeführt

Von den Untergruppen  
 "Congruenzgruppen" an  
 das sind solche, welche

$$\omega_1 = \alpha \omega' + \beta \omega'' =$$

$$\omega_2 = \gamma \omega' + \delta \omega'' =$$

durch Congruenz  
 werden, denen  
 ihrer Substitutionen  
 sich beziehen  
 Congruenzgruppen  
 nige Gruppe  
 modulo  
 ent sind  
 Substitutionen  
 gungen

$$d =$$

!

Congruenzgruppe  $n$  ten Stufe liefert die Bedingung:

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}.$$

In der That überzeugen wir uns leicht, dass die so characterisirten Substitutionen allemal eine Gruppe bilden.

Die zu Congruenzgruppen gehörigen Invarianten nennen wir Modulfunktionen  $n$  ter Stufe.

Wollen wir nun umgekehrt auf die Substitutionen des  $u$  eingehen:

$$u' = u + m, w, + m_2 w_2,$$

indem wir die  $w$  Substitutionen bei Seite lassen.

Hier sind die Untergruppen besonders leicht anzugeben. Sie ergeben sich, indem wir  $w_1, w_2$  durch irgend welche ganzzahligen Combinationen  $R_1, R_2$  ersetzen und enthalten die Substitutionen:

$$u' = u + m, R_1 + m_2 R_2,$$

wo

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= a w_1 + b w_2 \\ R_2 &= c w_1 + d w_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & (a, b, c, d \text{ ganze Zahl,} \\ & \text{len von irgend welcher} \\ & \text{Determinante } ad - bc = N). \end{aligned}$$



Der Discontinuitätsbereich besteht wieder aus einem Parallelogramme;  $N_1, N_2$  sind die Ecken des Parallelogrammes. Die Gesammtheit der Discontinuitätsbereiche liefert wieder eine Gittertheilung der Ebene, welche, wie wir uns ausdrücken, der ursprünglichen Gittertheilung eingelagert ist.

Das einzelne Elementarparallelogramm des neuen Gitters ist  $N$ -mal so gross, wie das des alten. Heiss  $P, P', G_2, G_3$  bezeichnen wir solche Functionen, welche zu dem neuen Gitter in derselben Beziehung stehen, wie  $p, p', g_2, g_3$  zu dem alten. Man wird dann nach der algebraischen Abhängigkeit fragen, welche  $P, P', p, p'$  verknüpft. Diese Frage nennt man das allgemeine Transformationsproblem  $N$ ter Ordnung.

Besondere Fälle des allgemeinen Problems ergeben sich wenn die Zahlen  $a, b, c, d$  gemeinsame Theiler besitzen. Die äusserste Specialisirung ist die, dass wir einen Theiler  $n$

herausheben können:

$$\mathcal{A}_1 = n (\alpha \omega_1 + \beta \omega_2)$$

$$\mathcal{A}_2 = n (\gamma \omega_1 + \delta \omega_2),$$

von der Beschaffenheit, dass wieder  $\alpha \delta - \beta \gamma = 1$  wird. Dann ist gleichzeitig  $\mathcal{N} = n^2$ . Statt der vorkommenden können wir dann ebensogut die mit ihr äquivalente Transformation betrachten:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= n \omega_1 \\ \mathcal{A}_2 &= n \omega_2 \end{aligned} \right\}.$$

Diesen speciellen Fall bezeichnet man als Multiplikation der Perioden.

Bei der Multiplikation haben wir mit Rücksicht auf die Homogenität der elliptischen Functionen:

$$\mathcal{P}^n = p(u, n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^2} p\left(\frac{u}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$

$$\mathcal{P}'^n = p'(u, n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^2} p'\left(\frac{u}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$

$$\mathcal{G}_2 = g_2(n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^4} g_2(\omega_1, \omega_2)$$

$$\mathcal{G}_3 = g_3(n\omega_1 + n\omega_2) = \frac{1}{n^6} g_3(\omega_1, \omega_2).$$

Bei der Multiplication stimmen also bis auf einen Zahlenfactor  $\frac{1}{nr}$  die  $G_2, G_3$  mit den  $g_2, g_3$  direct überein und die  $P, P'$  mit den  $p, p'$  gebildet für ein durch  $n$  getheiltes Argument.

Die Functionen  $p(n), p'(n)$  sind nicht nur in dem Fundamentalbereiche  $\omega_1, \omega_2$  sondern auch in dem Bereiche  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  elliptische Functionen, und lassen sich als solche durch die einfachsten zu diesem Bereiche gehörigen Functionen, d. i. durch  $P$  und  $P'$  rational darstellen. Man kommt dann zu Formeln

$$(p, p') = \text{Rat}(P, P'),$$

welche man „Multiplicationsformeln“ nennt. Umgekehrt stellen sich  $P$  und  $P'$  algebraisch durch  $p$  und  $p'$  dar. Diese umgekehrte Behandlung nennt man die Theilung der elliptischen Functionen. Analog stellt sich neben die vorhin betrachtete directe Transformation der elliptischen Functionen die inverse Trans.

formation. Bei gegebenem  $p$  und  $p'$  sind  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}'$   $n^2$ -deutig bestimmt. Ist nämlich

$\mathcal{P}_0 = \frac{1}{n^2} p(n_0, \omega_1, \omega_2), \mathcal{P}'_0 = \frac{1}{n^2} p'(n_0, \omega_1, \omega_2)$   
ein Wertepaar, welches zu den vorgegebenen Werthen von  $p$  und  $p'$  gehört, so erhalten wir hieraus alle unterchiedenen Wertepaare  $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ , indem wir bilden

$$\mathcal{P} = \frac{1}{n^2} p\left(n_0 + \frac{\lambda \omega_1 + \mu \omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right) \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0, 1, \dots, n-1 \\ \mu = 0, 1, \dots, n-1. \end{array} \right.$$

Diese Wertepaare sind in der That alle von einander verschieden und liefern bei der Multiplication mit  $n$  alle dieselben Werte von  $p$  und  $p'$ , wie  $\mathcal{P}_0$  und  $\mathcal{P}'_0$ . Es sind auch die einzigen Wertepaare von dieser Eigenschaft, wie daraus hervorgeht, dass jedes Paar  $(p, p')$  im Fundamentalbereiche nur einmal vorkommt.

Hier ist nun leicht zu sehen, dass das Teilungsproblem mit der vor-

hin eingeführten Hauptcongruenzgruppe  $n$ ter Stufe der  $\omega_1, \omega_2$  zusammenhängt. Verlangen wir nämlich alle Substitutionen  $\omega_1 = \alpha \omega'_1 + \beta \omega'_2$ ,  
 $\omega_2 = \gamma \omega'_1 + \delta \omega'_2$  ( $\alpha \delta - \beta \gamma = +1$ ) zu bestimmen, bei denen die sämtlichen vorangeführten Werte von  $P$  und  $P'$  un geändert bleiben, so kommen wir direct zu

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv 1, \beta \equiv 0, \\ \gamma \equiv 0, \delta \equiv 1. \end{array} \right\} \pmod{n},$$

d. h. eben zur Hauptcongruenzgruppe  $n$ ter Stufe. Unsere sämtlichen  $P, P'$  sind also Functionen der  $n$ ten Stufe.

Diese wenigen Erläuterungen mögen genügen, um in die Fragestellung einzuführen; das Nähere mögen Sie in den „Vorlesungen“ und anderwärts nachstudieren.

Ich gebe nun einige Resultate, welche man für niedrigere Stufenzahlen erhalten hat. Zunächst im Anschluss an die Weierstrass'sche

gungen genügt, eine ganze rationale  
 Function von  $g_2$  und  $g_3$  ist. Es deckt sich  
 also die neue Definition mit der früheren.  
 Legt man Wert darauf, dass in den Reihen-  
 entwickelungen nach  $\tau$  nur ganze Pot-  
 enzen als Coefficienten auftreten, so wird  
 man nicht die Grössen  $g_2, g_3$  selbst, son-  
 dern  $j_2 = 12g_2$  und  $j_3 = 216g_3$  zu Grun-  
 dulegen. Die Discriminante  $\Delta$  erfüllt die  
 Forderung ganzzahliger Coefficienten  
 von selbst; sie ist mit  $j_2$  und  $j_3$  durch  
 die Gleichung verbunden:  $1728\Delta = j_2^3 - j_3^2$ .  
 Von diesem Standpunkte aus empfiehlt es  
 sich auch statt der absoluten Invariante  
 $F$  die Function  $J = \frac{j_2^3}{\Delta} = 1728F$  einzuf-  
 führen. Die ganzen ganzzahligen Modul-  
 formen im Allgemeinen werden wie-  
 der durch die Bedingungen 1) bis 4)  
 definiert, wobei der 4. Bedingung hin-  
 zuzufügen ist, dass in der Reihe  $\mathcal{F}(\tau)$   
 nur ganzzahlige Coefficienten auf-  
 treten. Man erkennt, dass diese  
 ganzen ganzzahligen Modulformen  
 ganze ganzzahlige Functionen  
 von  $j_2, j_3$  und  $\Delta$  sind (welch'

letzteres sich hier selbstständig neben  $f_2$  und  $f_3$  stellt, da es sich aus  $f_2$  und  $f_3$  nur mit dem Nenner 1728 zu zusammensetzen lässt).

Wir gehen nun auf die Bedeutung der elliptischen Functionen für unsern eigentlichen Gegenstand, für die Haken-theorie ein. Es handelt sich ausschliesslich um negative Discriminan-ten. Wir unterscheiden dabei drei Stufen unserer bisherigen arithmetischen Entwicklungen:

1. Auf der obersten Stufe beschäftigen wir uns mit den Gitterzahlen, d. h. mit gewissen complexen Zahlen, welche den Eckpunkten eines beliebigen Parallelogramms in der Gaussischen Ebene zugeordnet sind. Sind  $\omega_1$  und  $\omega_2$  diejenigen complexen Zahlen, welche den Endpunkten der von 0 auslaufenden Seiten des ersten Parallelogramms zukommen, so ist die allgemeine Form der Gitterzahlen

$$\omega_1 x + \omega_2 y.$$

Die Bezeichnung wird praktischer Weise von vorne herein so eingerichtet, dass  $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  einen positiven imaginären Bestandtheil hat. Da die Definition der Gitterzahlen an die Punkte des Gitters, nicht an die Parallellinien desselben anknüpft, so wird man alle zu demselben Punktgitter gehörige Parallelgitter als gleichwerthig ansehen. Dementsprechend dass man alle Grössen  $\omega_1, \omega_2$  als gleichwerthig ansieht, welche mit  $\omega, \omega_2$  durch die Substitutionen verbunden sind.

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \alpha \omega'_1 + \beta \omega'_2 \\ \omega_2 &= \gamma \omega'_1 + \delta \omega'_2 \end{aligned} \right\} (\alpha\delta - \beta\gamma) = +1,$$

wobei wir uns auf die Det. +1 beschränken, damit die Vereinbarung betr. den imaginären Teil von  $\omega$  aufrecht erhalten bleibt.

2. Auf der zweiten Stufe betrachten wir die definiten quadratischen Formen, welche als Normen der Gitterzahlen definiert sind:



$$ax^2 + bxy + cy^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$$

Es sind dies insbesondere die positiven quadratischen Formen.

Den vorstehenden Substitutionsformeln entsprechend interessiert uns dabei weniger die einzelne Form, als die Klasse äquivalenter Formen.

3. Auf der dritten Stufe untersuchen wir nicht die quadratische Form, sondern die quadratische Gleichung:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \text{ bez. } a\omega^2 + b\omega + c = 0.$$

Bei diesem Standpunkte werden nicht die Zahlen  $a, b, c$  selbst, sondern nur die Verhältnisse  $a : b : c$  in Betracht gezogen.

Bei 1. kommt von unserem geometrischen Bilde die ganze Figur des Punktgitters nach Lage und Grösse zur Geltung. Bei 2. kommt es nur auf die Gestalt, nicht auf die Orientierung des Gitters an. Wenn wir nämlich das Punktgitter um  $O$  beliebig drehen, also  $e^{i\varphi}(\omega_1 x + \omega_2 y)$  an Stelle von  $\omega_1 x + \omega_2 y$  und entsprechend  $e^{-i\varphi}(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$  an Stelle

von  $\omega, x + \bar{\omega}, y$  setzen, so hat dieses auf die Norm der Gitterzahlen keinen Einfluss. Bei 3. bleibt ausser der Lage auch die absolute Grösse der Gittermaschen willkürlich. Wenn wir nämlich die ganze Gitterfigur in dem Verhältnisse  $\rho$  verkleinern, so werden die Zahlen  $a, b, c$  durch  $\rho a, \rho b, \rho c$  ersetzt. Dadurch wird aber die Gleichung  $a\omega^2 + b\omega + c = 0$  nicht geändert.

Andererseits gehört zu jedem Gitter ein System elliptischer Functionen mit den Perioden  $\omega_1, \omega_2$ , welches ungetändert bleibt, wenn wir  $\omega_1, \omega_2$  durch ein äquivalentes Paar  $\omega'_1, \omega'_2$  ersetzen. Wir behaupten aber mehr. Die Gleichheit gewisser elliptischer Functionen zieht die Äquivalenz der Perioden nach sich. Die elliptischen Functionen versehen uns somit mit den vollen analytischen Invarianten unserer zahlentheoretischen Gebilde. Des Genaueren stellt sich die Sache so: Von dem Standpunkte 1. sind  $g_2$  und  $g_3$  die vollen Invarianten des Punktgitters, so dass, wenn  $g_2$  und  $g_3$  gebildet

für 2 Periodenpaare, übereinstimmen, die zu den Periodenpaaren gehörigen Punktgitter nach Gestalt und Lage identisch sind.

Auf dem Standpunkte 2) sind außer  $F = \frac{2g^3}{\Delta}$  Norm( $g_2$ ) und Norm( $g_3$ ) die se Invarianten. Dass durch die Gleichheit der absoluten Invarianten sowie der Normen die Orientirung der Punktgitter noch nicht festgelegt sein kann, ist von vornherein klar. Wenn wir nämlich das Punktgitter um  $\omega$  drehen, also  $\omega_1$  und  $\omega_2$  durch  $e^{i\ell}\omega_1$  und  $e^{i\ell}\omega_2$  ersetzen, so wird wegen der Homogenitätseigenschaft von  $g_2$  und  $g_3$  sowohl  $F$  wie  $Ng_2$  und  $Ng_3$  nicht verändert.

3. Von dem dritten Standpunkte aus ist  $\mathcal{F}(\omega)$  die einzige Invariante in dem Sinne, dass die Gleichung  $\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}(\omega')$  zur Folge hat, dass  $\omega$  und  $\omega'$  Wurzeln von zwei äquivalenten quadratischen

Gleichungen sind, dafs also

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}$$

Beim Beweise dieser Behauptungen beginnen wir mit dem Falle 3). Wir wissen, dass  $F(w)$  in seinem Fundamentallbereiche jeden Werth nur einmal annimmt. In der  $w$ -Ebene hat daher  $F(w)$  denselben Werth nur für solche Punkte, welche an äquivalenten Stellen verschiedener Fundamentallbereiche liegen. Aus der Gleichung  $F(w) = F(w')$  folgt also  $w = \frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}$ . Die Punktgitter sind ähnlich, aber nicht notwendig ähnlich gelegen und gleich. Darauf stützen wir uns beim Beweise der Behauptungen ad 2) und 1). Wir haben jedenfalls:  $F\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = F\left(\frac{w'_1}{w'_2}\right)$ . Hieraus ergibt sich, wie wir sehen:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha w'_1 + \beta w'_2}{\gamma w'_1 + \delta w'_2}$$

oder, homogen geschrieben:

$$\begin{cases} \rho w_1 = \alpha w'_1 + \beta w'_2 \\ \rho w_2 = \gamma w'_1 + \delta w'_2 \end{cases}$$

Nun ist aber

$$g_2(\rho w_1, \rho w_2) = \rho^{-4} g_2(w_1, w_2)$$

und

$$g_3(\varrho \omega_1, \varrho \omega_2) = \varrho^{-6} g_3(\omega_1, \omega_2);$$

ferner haben wir

$$g_2(\omega'_1, \omega'_2) = g_2(\alpha \omega'_1 + \beta \omega'_2, \gamma \omega'_1 + \delta \omega'_2) = g_2(\varrho \omega_1, \varrho \omega_2),$$

also

$$g_2(\omega'_1, \omega'_2) = \varrho^{-4} g_2(\omega_1, \omega_2)$$

und ebenso

$$g_3(\omega'_1, \omega'_2) = \varrho^{-6} g_3(\omega_1, \omega_2).$$

Im Falle 1.) lautet die Voraussetzung

$$g_2(\omega'_1, \omega'_2) = g_2(\omega_1, \omega_2) \text{ und}$$

$$g_3(\omega'_1, \omega'_2) = g_3(\omega_1, \omega_2). \text{ Daraus ergibt}$$

sich

$$N(\varrho^2) = 1 \text{ oder } \varrho = \pm 1.$$

In diesem Falle sind die Periodenpaare direct äquivalent, w.zw., wenn  $\varrho = +1$ , mittelst der Substitution  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , wenn  $\varrho = -1$ , mittelst  $\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$ . Die Punktgitter sind also völlig identisch.

Im Falle 2.) setzen wir nun voraus

$$Ng_2(\omega'_1, \omega'_2) = Ng_2(\omega_1, \omega_2) \text{ und}$$

$$Ng_3(\omega'_1, \omega'_2) = Ng_3(\omega_1, \omega_2). \text{ Daraus}$$

folgt mit Rücksicht auf das Vorstehende:

$$\eta^2 = 1, \text{ also } \eta = \epsilon^{i\varphi}.$$

In diesem Falle sind die Periodenpaare  $w_1, w_2$  und  $w'_1, w'_2$  also bis auf die Orientierung äquivalent; Die Punktgitter sind der Gestalt nach identisch, nur der Lage nach sind sie eventl. gegen einander gedreht.

Wie man sieht, ist der eigentliche Kernpunkt dieser fundamentalen Sätze, dass  $F$  im Fundamentalbereiche der  $w$ -Ebene jeden Werth gerade einmal annimmt (dass dieser Fundamentalbereich direct eine eindeutige Abbildung der  $F$ -Ebene ist).

Frei. d. 28. II. Wir haben uns jetzt mit derjenigen systematischen Auffassung der elliptischen Functionen vertraut zu machen, welche in den Vorlesungen über Modulfunctionen entwickelt ist.

Die bisher betrachteten elliptischen Functionen waren definiert als Invarianten der Gruppe

$$u' = \alpha u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$$

$$\omega_1' = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2$$

$$\omega_2' = \gamma \omega_1 + \delta \omega_2,$$

welche relativ zu dem Discontinuitätsbereich der Gruppe keine wesentlichen Singularitäten besitzen. Wir erweitern jetzt die Theorie dahin, dass wir auch die Untergruppen dieser Gesamtgruppe in Betracht ziehen. Dabei aber soll es sich nur um Untergruppen von endlichem Index handeln. Wir suchen dann die eindeutigen, homogenen Invarianten dieser Untergruppen auf, welche relativ zu dem betr. Discontinuitätsbereiche keine wesentliche Singularität besitzen. Diese Invarianten sind elliptische Funktionen im weiteren Sinne. Während die bisherigen Funktionen rationale Funktionen von  $p, p', q_2$  und  $q_3$  waren, erweisen sich diese neuen Funktionen als algebraisch von  $p, p', q_2$  und  $q_3$  abhängig. Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dass alle algebraischen Funktionen

dieser Grössen elliptische Functionen seien, vielmehr entsteht die Frage, welche algebraischen Functionen von  $p, p', g_2$  und  $g_3$  als Invarianten einer unserer Untergruppen erhalten werden können. Wiederum kann man die ganzen algebraischen Functionen bevorzugen und kann die Forderung hinzufügen, dass nur ganzzahlige Coefficienten in ihren Entwicklungen auftreten sollen.

Die Theorie hat nun der Reihe nach folgende Aufgaben zu erledigen:

1. Alle Untergruppen der ternären Grupp.  $\rho e$  aufzuzählen.

2. Die zugehörigen Discontinuitätsbereiche anzugeben.

3. Die Functionen zu bilden, welche die Discontinuitätsbereiche zu Fundamentalkreischen haben und relativ zu denselben keine wesentlichen Singularitäten besitzen.

4. Die algebraischen Beziehungen zu untersuchen, in welchen diese Functionen zu den  $p, p', g_2, g_3$  stehen.

Ich will mich hier, wie in den Vorle.



singen" geschieht einen Augenblick auf Modulfunctionen, also die binäre Gruppe der  $\omega$ -Substitutionen beschränken. In dieser Hinsicht werde etwa Folgendes angeführt:

Von den Untergruppen sind die „Congruenzgruppen“ am besten untersucht, das sind solche, welche aus der Gruppe

$$\omega_1 = \alpha \omega'_1 + \beta \omega'_2$$

$$\omega_2 = \gamma \omega'_1 + \delta \omega'_2$$

durch Congruenzen ausgeschieden werden, denen man die Coefficienten ihrer Substitutionen unterwirft. Specially bezeichnet man als „Hauptcongruenzgruppe“ diejenige Gruppe deren Substitutionen modulo  $n$  der Identität congruent sind. Die Coefficienten ihrer Substitutionen genügen den Bedingungen

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv 0 \\ \gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv 1 \end{array} \right\} \pmod{n}.$$

Ein Beispiel für eine umfassendere

Congruenzgruppe  $n$  ten Stufe liefert die Bedingung:

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}.$$

In der That überzeugen wir uns leicht, dass die so charakterisirten Substitutionen allemal eine Gruppe bilden.

Die zu Congruenzgruppen gehörigen Invarianten nennen wir Modulfunktionen  $n$  ten Stufe.

Wollen wir nun umgekehrt auf die Substitutionen des  $u$  eingehen:

$$w' = w + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

indem wir die  $w$  Substitutionen bei Seite lassen.

Hier sind die Untergruppen besonders leicht anzugeben. Sie ergeben sich, indem wir  $\omega_1, \omega_2$  durch irgend welche ganzzahligen Combinationen  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  ersetzen und erhalten die Substitutionen:

$$w' = w + m_1 \mathcal{R}_1 + m_2 \mathcal{R}_2,$$

wo

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{R}_1 = a\omega_1 + b\omega_2 \\ \mathcal{R}_2 = c\omega_1 + d\omega_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (a, b, c, d \text{ ganze Zahl,} \\ \text{len von irgend welcher} \\ \text{Determinante } ad - bc = N). \end{array}$$

Der Discontinuitätsbereich besteht wieder aus einem Parallelogramme;  $N_1, N_2$  sind die Ecken des Parallelogrammes. Die Gesamtheit der Discontinuitätsbereiche liefert wieder eine Gittertheilung der Ebene, welche, wie wir uns ausdrücken, der ursprünglichen Gittertheilung eingelagert ist. Das einzelne Elementarparallelogramm des neuen Gitters ist  $N$ -mal so gross, wie das des alten. Heiss  $P, P', G_2, G_3$  bezeichnen wir solche Funktionen, welche zu dem neuen Gitter in derselben Beziehung stehen, wie  $p, p', g_2, g_3$  zu dem alten. Man wird dann nach der algebraischen Abhängigkeit fragen, welche  $P, P', u, p, p'$  verknüpft. Diese Frage nennt man das allgemeine Transformationsproblem  $N$ ter Ordnung.

Besondere Fälle des allgemeinen Problems ergeben sich wenn die Zahlen  $a, b, c, d$  gemeinsame Theiler besitzen. Die äusserste Specialisirung ist die, dass wir einen Theiler  $n$

herausheben können:

$$\mathcal{A}_1 = n (\alpha \omega_1 + \beta \omega_2)$$

$$\mathcal{A}_2 = n (\gamma \omega_1 + \delta \omega_2),$$

von der Beschaffenheit, dass wieder  $\alpha \delta - \beta \gamma = 1$  wird. Dann ist gleichzeitig  $N = n^2$ . Statt der vorstehenden können wir dann ebensogut die mit ihr äquivalente Transformation betrachten:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= n \omega_1 \\ \mathcal{A}_2 &= n \omega_2 \end{aligned} \right\}.$$

Diesen speziellen Fall bezeichnet man als Multiplikation der Perioden.

Bei der Multiplikation haben wir mit Rücksicht auf die Homogenität der elliptischen Functionen:

$$\mathcal{P}^n = \mathcal{P}(n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^2} \mathcal{P}\left(\frac{n}{n}\omega_1, \frac{n}{n}\omega_2\right)$$

$$\mathcal{P}'^n = \mathcal{P}'(n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^2} \mathcal{P}'\left(\frac{n}{n}\omega_1, \frac{n}{n}\omega_2\right)$$

$$\mathcal{G}_2^n = \mathcal{G}_2(n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^4} \mathcal{G}_2(\omega_1, \omega_2)$$

$$\mathcal{G}_3^n = \mathcal{G}_3(n\omega_1 + n\omega_2) = \frac{1}{n^6} \mathcal{G}_3(\omega_1, \omega_2).$$

Bei der Multiplication stimmen also bis auf einen Zahlenfactor  $\frac{1}{nr}$  die  $G_2, G_3$  mit den  $g_2, g_3$  direct überein und die  $P, P'$  mit den  $p, p'$  gebildet für ein durch  $n$  getheiltes Argument.

Die Functionen  $p(n), p'(n)$  sind nicht nur in dem Fundamentalbereiche  $\omega_1, \omega_2$  sondern auch in dem Bereiche  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  elliptische Functionen, und lassen sich als solche durch die einfachsten zu diesem Bereiche gehörigen Functionen, d. i. durch  $P$  und  $P'$  rational darstellen. Man kommt dann zu Formeln

$$(p, p') = \text{Rat} (P, P'),$$

welche man „Multiplicationsformeln“ nennt. Umgekehrt stellen sich  $P$  und  $P'$  algebraisch durch  $p$  und  $p'$  dar. Diese umgekehrte Behandlung nennt man die Theilung der elliptischen Functionen. Analog stellt sich neben die vorhin betrachtete directe Transformation der elliptischen Functionen die inverse Trans.

Theorie:

1. Kodulformen der zweiten Stufe erhält man hier aus der Gleichung

$$4 \rho^3 - g_2 \rho - g_3 = 0,$$

nämlich deren Wurzeln  $e_1, e_2, e_3$ . Man pflegt insbesondere die Differenzen  $e_i - e_k$  zu betrachten.

Diese  $e_i$ , bez.  $e_i - e_k$  sind, wie man aus ihrem Zusammenhänge mit den  $g_2, g_3$  ersieht, von der 2<sup>ten</sup> Dimension. Eine Kodulfunktion der zweiten Stufe erhält man daraus durch Quotientenbildung. Diese Kodulfunktion ist der Legendre'sche Kodul, oder vielmehr das Quadrat desselben:

$$K^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

Geometrisch bedeutet  $K^2$  das Doppelverhältnis der vier Verzweigungspunkte  $e_1, e_2, e_3, \infty$  auf der Riemann'schen Fläche  $(\rho, \rho')$ .

An diese Bedeutung soll die Bezeichnung  $\lambda$  welche in den „Kodulf.“ für  $K^2$  benutzt wird, ein

nern. Bei den Vertauschungen der vier Tertzweigungspunkte nimmt das Doppelverhältnis im Ganzen 6 verschiedene Werte an. Der einzelnen Vertauschung entspricht eine Transformation erster Ordnung der Perioden, also eine Substitution aus unserer Gruppe  $(\frac{x}{y})$ . Gegenüber den Substitutionen der Gesamtgruppe ist daher der Legendre'sche Modul 6 verschiedener Werte fähig, was mit dem Index (6) der Hauptkongruenzgruppe 2<sup>ter</sup> Stufe übereinstimmt.

2. In der Weierstraß'schen Theorie kommen ferner Ausdrücke vor von der Form:

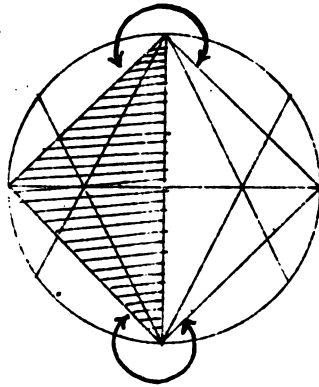
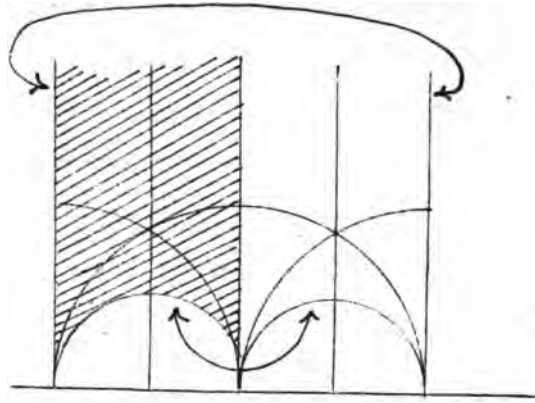
$$\sqrt{p(u) - e_1}$$

Dieselben sind, ebenso wie  $p(u)$ , eindeutige doppelperiodische Funktionen von  $u$ ; ihr Periodenparallelogramm ist aber doppelt so gross wie das ursprüngliche. (Beispielsweise gehört zu

$$\sqrt{p(u) - e_1}$$

das nebenstehende Parallelo-

wie überhaupt  
 die geradlinige  
 Figur vor der  
 Kreisbogenfi-  
 gur entschieden  
 den Vorzug ver-  
 dient. Hier  
 ist nämlich  
 der Disconti-  
 nuitätsbereich zweiter Stufe ein Qua-  
 drat, welches sich aus den beiden in  
 der Mittellinie  
 zusammensto-  
 senden „Constu-  
 tions-dreiecken“  
 zusammensetzt.  
 Durch die „Hülfs-  
 linien“ zerfallen  
 letztere in je 6  
 Elementardrei-  
 ecke entsprechend den  $2 \times 6$  Kreisbogen-  
 dreiecken der 10. Ebene.



Wir erwähnten bereits, dass das Dop-  
 pelverhältniß  $\lambda$  eine Modulfunction  
 der 2<sup>ten</sup> Stufe ist;  $\lambda$  nimmt daher



alle seine Werte in dem genannten Bereiche an. Darüber hinaus zeigt sich nun aber, dass  $\lambda$  in Discontinuitätsbereichen zweiter Stufe jeden Wert nur einmal annimmt. Man kann daher diesen Bereich geradezu als conformes Abbild der  $\lambda$ -Ebene betrachten; der positiven  $\lambda$ -Halbebene entspricht dabei die eine (in den Figuren schraffierte) Hälfte dieses Bereiches. In Folge dessen wird die Funktion  $\lambda(\omega)$  die charakteristische Invariante unserer Untergruppe  $\rho$  in demselben Sinne, wie  $F(\omega)$  die charakteristische Invariante der Gesamtgruppe liefern. Wir können nämlich aus der Gleichung  $\lambda(\omega) = \lambda(\omega')$  sofort auf die folgende Gleichung schliessen:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \text{ wo } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ mod } 2.$$

In der That nimmt  $\lambda(\omega)$  an denjenigen Stellen, welche vermöge der Hauptcongruenzgruppe 2<sup>ter</sup> Stufe

äquivalent sind, und was das Wichtigere ist, nur an diesen Stellen die gleichen Werte an.

2. Bei den Congruenzgruppen höherer Stufen werden wir in entsprechender Weise zunächst den Index der Untergruppe, dann ihren Discontinuitätsbereich bestimmen. Letzterer setzt sich aus einzelnen Discontinuitätsbereichen der Gesamtgruppe zusammen, wobei die Anzahl derselben durch den Index der Untergruppe angegeben wird.

Hierbei greift eine sehr wichtige Unterscheidung Platz, welche an die Zuordnung der Randcurven anknüpft. Die Pfeile, welche wir an unsern Figuren anbringen, weisen darauf hin, dass wir die Discontinuitätsbereiche unserer Gruppen als geschlossene Flächen aufzufassen haben, indem wir uns die zugeordneten Randcurven zusammengebogen denken. Dabei kann sich entweder eine geschlossene Fläche vom Character der Kugelfläche (p.0) ergeben, oder

eine Fläche von höherem Zusammen-  
hänge. Die Riemann'sche Theorie der  
 algebraischen Functionen lehrt nun,  
 dass die Flächen der ersteren Art con-  
 form auf die Kugel bez. die schiefe  
 Ebene abgebildet werden können.  
 Bezeichnen wir mit  $u$  eine complex.  
 Variable, welche in gewöhnlicher Weise  
 in dieser Ebene ausgebreitet ist,  
 so stellt  $u(w)$  eine Modulfunction  
 dar, welche in dem betr. Disconti-  
 nuitätsbereiche der  $w$ -Ebene je-  
 den Wert nur einmal annimmt.  
 Wir bezeichnen eine solche Function  
 als Hauptmodul. Die fundamenta-  
le Eigenschaft des Hauptmoduls ist  
die, dass jede andere Modulfunction  
des betr. Bereiches eine rationale  
Function des Hauptmoduls ist. Da,  
 hingegen kann man der Riemann's-  
 chen Theorie zufolge die Flächen  
 mit  $p > 0$  nicht auf die schiefe  
 Ebene, sondern nur auf eine mehr-  
 fach überdeckte Ebene, eine Rie-  
 mann'sche Fläche abbilden, welche

zu derselben Zahl  $p$  gehört. Die einzelne Stelle der Riemann'schen Fläche wird aber nicht durch eine complexe Variable  $u$ , sondern nur durch die Zusammenstellung zweier Variabler  $(u, u')$  festgelegt, welche algebraisch von einander abhängen. Dementsprechend werden die Modulfunctionen eines Bereiches von höherem Zusammenhänge nicht mehr rational durch eine, sondern durch zwei Functionen  $(u(w), u'(w))$  ausdrückbar, zwischen denen eine algebraische Relation besteht. Im Falle  $p > 0$  gibt es also keinen Hauptmodul. Diese fundamentalen Begriffe sind im 8<sup>ten</sup> Abschnitte der „Modulf.“ auseinander gesetzt. Sie treten natürlich nicht nur bei den Modulfunctionen, sondern überhaupt bei den eindeutigen Functionen eines beliebigen Fundamentalbereiches, also auch beispielsweise bei den elliptischen Functionen in ihrer Abhängigkeit von  $w$ , in Kraft.

Die bisher von uns betrachteten Fundamentallbereiche liefern in der That bereits geschlossene Flächen mit  $p=0$  und  $p>0$ . In der ersteren Kategorie gehört der Fundamentallbereich der Gesamtgruppe der  $(\alpha, \beta)$  Substitutionen und der der Hauptcongruenzgruppe 2<sup>ter</sup> Stufe. Dementsprechend lernten wir in den Functionen  $\mathcal{F}(w)$  und  $\mathcal{N}(w)$  Modulfunctionen kennen, welche in dem betr. Fundamentallbereich jeden Wert nur einmal annehmen. Alle andern Modulfunctionen des betr. Bereiches lassen sich durch diese „Hauptmoduln“ rational ausdrücken, wie wir bereits sagten. Andererseits giebt das Periodenparallelogramm der  $w$ -Ebene bei der Zusammenbiegung eine geschlossene Fläche vom Character des Ringes, eine Fläche mit  $p=1$ . Dementsprechend giebt es keine Function, welche im Periodenparallelogramm jeden Wert nur einmal annimmt. Dagegen kennen wir

2. Funktionen  $\rho(u)$  und  $\rho'(u)$ , welche zusammengenommen die einzelnen Punkte des Periodenparallelogrammes in eindeutiger Weise festlegen und welche dieses conform auf die Riemann'sche Fläche  $(\rho, \rho')$  abbilden. Wollen wir die allgemeineren doppeltperiodischen Funktionen des Periodenparallelogramms rational darstellen, so brauchen wir dazu beide Funktionen  $\rho$  und  $\rho'$ !

3. Bei der Untersuchung der folgenden Stufen (d. h. der jedesmaligen Hauptcongruenzgruppen) zeigt sich dass die Fundamentalbereiche der 3<sup>ten</sup>, 4<sup>ten</sup>, 5<sup>ten</sup> Stufe noch  $\rho=0$ , die der höheren Stufen aber  $\rho>0$  besitzen. Daher haben wir bei der 3<sup>ten</sup>, 4<sup>ten</sup> und 5<sup>ten</sup> Stufe Hauptmoduln, welche bez.

$$\eta(u), \theta(u), \xi(u)$$

heissen, und durch welche sich die übrigen Modulfunctionen der betr. Fundamentalbereiche rational ausdrücken. In's Besondere kann die

Function  $F(\omega)$  selbst als Modulfunction der 2<sup>ten</sup>, 3<sup>ten</sup>, 4<sup>ten</sup> und 5<sup>ten</sup> Stufe aufgefasst werden. Daher ist  $F$  eine rationale Function sowohl von  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  als von  $\xi$ .

Umgekehrt hängen diese Functionen ihrerseits algebraisch von  $F$  ab. Die Art dieser Abhängigkeit ist von an derer Seite her wohlbekannt. Es sind nämlich die Irrationalitäten, welche sich bei der Darstellung von  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  und  $\xi$  durch  $F$  ergeben, keine anderen, als die Irrationalitäten der regulären Körper u. zw. ist

$\lambda(F)$  die Dieder-Irrationalität für  $n=3$ .  
 $\mu(F)$  - Tetraeder - "  
 $\nu(F)$  - Oktaeder - "  
 $\xi(F)$  - Ikosaeder - "

Es ist dies ein sehr merkwürdiger Zusammenhang, dem wir leider nicht weiter nachgehen können.

4. Die Tendenz der „Modulfunctionen“ ist nun geradezu, neben dem  $F$  der Weierstrassischen und dem  $\lambda$  der Jacobi'schen Theorie die Moduln  $h$

herer Stufen, welche sonst in der Literatur ziemlich vernachlässigt werden, also ins Besondere die Tetraeder-, die Octaeder- und die Ikosaeder-Fraktionen systematisch zu berücksichtigen. Dieselbe Forderung werden wir auch nach der zahlentheoretischen Seite stellen. Man sollte die Theorie der singulären elliptischen Gebilde nicht einseitig für die  $F$  und  $\lambda$  entwerfen, wie es bisher geschehen ist, sondern sollte auch die  $\mu$ ,  $0$  und  $\beta$  in Betracht ziehen. Das kann nicht schwer sein und wird doch viel Interesse bieten. Quadratische Formen  $(a, b, c)$  werden dabei nur insofern als äquivalent gelten, als sie durch Substitutionen  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  in einander übergehen, die modulo 3, bez. 4 oder 5 zur Identität congruent sind. Dieselbe Forderung ist in Bezug auf den Zahlenmodul 2 bereits von Kronecker u. A. überall da getroffen worden, wo es sich um  $\lambda(w)$  handelt.



5. Der Uebergang von Modulfunctionen niederer zu solchen höherer Stufe kann in besonderen Fällen durch Wurzelziehen bewerkstelligt werden. Diese Bildungsweise der Modulfunctionen ist von besonderer Wichtigkeit; sie soll daher an einzelnen Beispielen erläutert werden.

Ausgehend von dem Legendre'schen Modul  $\lambda$  bildet man

$$\sqrt[2]{\lambda}, \sqrt[4]{\lambda}, \sqrt[8]{\lambda}.$$

Es zeigt sich, dass diese Functionen in der  $w$ -Ebene eindeutig und Modulfunctionen bez. von der

4<sup>ten</sup>, 8<sup>ten</sup>, 16<sup>ten</sup> Stufe sind. Ferner zeigt sich, dass man auch aus dem Ausdrucke  $\lambda(\lambda-1)$  eine Reihe von Wurzeln ausziehen kann, so dass sich Congruenzmoduln ergeben. Es werden nämlich

$\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda(\lambda-1)}$   
eindeutige Modulfunctionen

Boy. von der

4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

Stufe. Dieselben treten ebenfalls in der Litteratur ausserordentlich viel auf, insbesondere kommt  $\sqrt{\lambda(\lambda-1)}$  bei Weber unter der Bezeichnung  $f(\omega)$  vor.

In ähnlicher Weise verfährt man mit der Discriminante  $\Delta$ , welche eine Modulform der ersten Stufe und, wie aus der Darstellung

$$\Delta = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} \tau \prod (1 - \tau^m)^{24}$$

hervorgeht, der -12 ten Dimension ist. Man betrachtet nämlich

die Modulformen  $\Delta, \sqrt{\Delta}, \sqrt[3]{\Delta}, \sqrt[4]{\Delta}, \sqrt[6]{\Delta}, \sqrt[12]{\Delta}$  von der Dimension -12, -6, -4, -3, -2, -1 und der Stufe 1, 2, 3, 4, 6, 12.

6. Wir suchen uns von dem der Bildung dieser Ausdrücke zu Grunde liegenden Princip, soweit es in Kürze geschehen kann, Redeenschaft zu geben. Dass man zunächst bei  $\Delta$  mit dem Wurzelzeichen nur bis  $\sqrt[12]{\Delta}$  gehen darf,

sofern man eindeutige Functionen von  $w_1, w_2$  erhalten will, ist klar, da ja  $\mathbb{T}_\Delta$  bereits von der Dimension  $-1$  ist. Dass man aber wirklich so weit gehen darf, ohne dass man zu vieldentigen Functionen kommt, ergibt sich aus der vorstehenden Productdarstellung von  $\Delta$ , die doch für den ganzen in Betracht kommenden Bereich  $|r| < 1$  convergirt. Wir können hier nämlich die 2<sup>te</sup>, 3<sup>te</sup>, 4<sup>te</sup>, 6<sup>te</sup>, 12<sup>te</sup> Wurzel teils in rationaler Form, teils bei dem Factor  $x$  in transcendenten Form ausziehen, indem

$$\text{z. B. } x^{1/2} = e^{\frac{ixw_1}{2w_2}} = e^{\frac{ixw}{6}}$$

eine eindeutige Function von  $w_1$  und  $w_2$  wird. Was die angegebenen Exponenten betrifft, so müssen wir uns mit einem Hinweis auf die „Modulf.“ (Bol. I pg 623) begnügen.

Bei den Ausdrücken in  $\lambda$  liegen die Verhältnisse etwas anders.

Man erkennt nämlich (aus der Dreiecks-  
 ecktheilung der  $w$ -Ebene) dass jede  
beliebige Wurzel aus  $\lambda$  eine eindeu-  
tige Function von  $w$  darstellt. Das  
 gilt in's Besondere auch für den  $\sqrt[\lambda]{\lambda}$ ,  
 den wir ja als eine unendlich hohe Wur-  
 zel auffassen können. Wir können da-  
 her den Ausdruck  $\sqrt[\lambda]{\lambda}$  ( $\tau$  beliebig) als  
 eine Modulfunction bezeichnen. Die-  
 selbe stellt aber im Allgemeinen kei-  
 nen Congruenzmodul dar. Viel-  
 mehr beweist man (vergl. Modulf.  
 Bd I pg. 656), dass nur im Falle  
 $\tau = 2, 4$  und  $8$  Congruenzmodulen  
 der oben angegebenen Aufzählungen  
 erhalten werden. Desgleichen er-  
 giebt sich hinsichtlich der GröÙe  
 $\lambda(\lambda-1)$ , dass nur die oben angege-  
 benen Wurzeln Congruenzmodulen  
 liefern.

Noch möge der Zusammenhang  
 von  $\sqrt[\lambda]{\lambda}$  und  $\sqrt[\lambda(\lambda-1)]{\lambda}$  mit der Dis-  
 criminante  $\Delta$  angeführt werden.  
 Man findet in dieser Hinsicht  
 (vergl. Modulf. II pg. 66) die Darstel-

Lung:

$$\sqrt[r]{-\lambda} = \sqrt[2r]{\frac{\Delta(\frac{\omega_1}{r}, \frac{\omega_2}{r})}{\Delta(\omega_1, \frac{\omega_2}{r})}}, \quad \sqrt[2r]{\lambda(\lambda-1)} = \sqrt[2r]{\frac{16 \Delta(\frac{\omega_1}{r}, \frac{\omega_2}{r})}{\Delta(\frac{\omega_1}{r}, \frac{\omega_2}{r})}}$$

dieses zeigt, dass  $\sqrt[r]{-\lambda}$  und  $\sqrt[2r]{\lambda(\lambda-1)}$  auf Wurzeln aus transformirten  $\Delta$  zurückkommen.

4. Für die hier betrachteten Wurzelfunctionen scheint eine eigene Terminologie am Platze. Wir sagten, dass  $\sqrt[r]{\Delta}$  ( $r = 2, 3, 4, 6, 12$ ) sich bei den Substitutionen der 1<sup>ten</sup> Stufe im Allgemeinen verändert und daher einer höheren Stufe angehört. Die Änderung kann aber nur in dem Hinzutreten von 2., 3., 4., 6., 12<sup>ten</sup> Einheitswurzeln bestehen. Diese Größen stehen daher mit der 1<sup>ten</sup> Stufe in einem engen Zusammenhang als die allgemeinen Modulfunctionen der betr. Stufe. Wir wollen diese Größen der 1<sup>ten</sup> Stufe adjungirt nennen. Ebenso werden wir die angegebenen Wurzeln aus  $\lambda$  und  $\lambda(\lambda-1)$  der

2. ten Stufe adjungirt nehmen, weil sie bei allen Substitutionen der 2. ten Stufe sich nur um Einheitswurzeln verändern. Auch diese Auffassung entspricht der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen, in welcher in der That neben den Functionen, die auf einer Riemann'schen Fläche eindeutig sind, in erster Linie solche vieldeutige Functionen der Fläche betrachtet werden, die sich bei Umläufen um Einheitswurzeln ändern.

Den Schluss dieser Vorlesung mögen einige Bemerkungen zu dem Werke über Modulfunctionen bilden, welche die Stellung der Verfasser zu dem in dem Buche verfolgten Plane wiedergeben.

Das Werk beschäftigt sich ja fast ausschliesslich mit den Modulfunctionen, betrachtet also die elliptischen Functionen durchaus in ihrer Abhängigkeit von den  $\omega$ , während die Abhängigkeit von  $u$

zurückgedrängt wird. Hierin wol-  
len Sie nur einen Akt ausgleichender  
Gerechtigkeit erblicken. Während  
nämlich die bisherigen Darstellungen  
die Abhängigkeit der elliptischen Func-  
tionen von den Perioden in ungebör-  
licher Weise vernachlässigten, schien  
es vorteilhaft, einmal diese Seite der  
Theorie vornehmlich hervorzuheben.

Schliesslich muss die allgemeine Auf-  
fassung die sein, dass die elliptischen  
Functionen solche drei Variablen  $u, w_1, w_2$   
sind, wobei man nur nach Bedürf-  
nis bald die eine, bald die ande-  
re dieser Variablen voranstellt.

Eine zweite Bemerkung soll sich  
auf die dem Buche zu Grunde lie-  
gende Systematik, auf die Einthei-  
lung nach Untergruppen und zu-  
gehörigen Invarianten, ins beson-  
dere also die Aufeneinteilung  
beziehen. Diese Systematik hat  
gestattet, eine grosse Reihe der  
bei den elliptischen Functionen  
hervortretenden Beziehungen un-

der einheitliche und übersichtliche Gesichtspunkte zu bringen und in der Fülle der Formeln Ordnung zu stiften. Aber die Natur der Dinge ist allemal reicher als jedes noch so vollkommenere System. Auch hier bleibt ein Rest von elliptischen Beziehungen übrig, der in das System nicht hineinpassen will, nach Aufrichtung des Systems werden gerade diese Beziehungen ein besonderes Interesse beanspruchen. Denn in ihnen liegen die Keime weiterer Entwicklung.

Dies möge noch einer Seite hin näher ausgeführt werden. Wir wollen die Produktformel für die Discriminante folgendermassen schreiben:

$$\Delta = \left(\frac{2}{\omega_3}\right)^{12} \varphi(\omega), \quad \varphi(\omega) = r \prod (1-r^m)^{24}$$

und die Function  $\varphi(\omega)$  in's Auge fassen. Dieselbe ist in unserer Terminologie überhaupt keine Modulfunction; denn sie ändert



sich bei sämtlichen Substitutionen der Modulgruppe. Da  $\Delta$  selbst un-  
geändert bleibt, so haben wir in  
der That:

$$\varphi\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = \left(\frac{\gamma\omega + \delta}{2\pi}\right)^{12} \Delta(\omega_1, \omega_2) \\ = (\gamma\omega + \delta)^{12} \varphi(\omega).$$

Allgemeiner werden wir nun solche  
Functioren in Betracht ziehen, wel-  
che sich bei unsern Substitutionen  
um irgend eine Potenz von  $\gamma\omega + \delta$   
ändern, wobei wir auch gebroche-  
ne Potenzen nicht ausschließen.

Es zeigt sich, dass eine solche Func-  
tion sehr wohl in der Variablen  $\omega$   
eindeutig sein kann, was wir al-  
erdings festhalten wollen. Sei  
nämlich

$$\phi_r(\omega) = \sqrt[r]{\varphi(\omega)} = r^{1/r} \pi(1 - \tau^m)^{\frac{24}{r}} = e^{\frac{24\pi i}{r}} \cdot \pi(1 - \tau^m)^{\frac{24}{r}}.$$

Hier können wir jeden Factor des  
Productes nach dem Binom ent-  
wickeln und dann das ganze

Produkt in eine Potenzreihe nach  $x$  ordnen, die für  $|x| < 1$  convergirt und also eine in der positiven  $\omega$ -Halbebene eindeutige Function ergibt. Während wir von dem früheren Standpunkte aus bei  $\Delta$  nur die Wurzeln  $r = 2, 3, 4, 6, 12$  zulassen, kann  $r$  jetzt jede Zahl bedeuten. Die neue Function  $\phi_r(\omega)$  genügt der Functionalgleichung:

$$\phi_r\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = (\gamma\omega + \delta)^{\frac{12}{r}} \phi_r(\omega).$$

Wir sehen uns durch diese Gleichung vor ein merkwürdiges Problem gestellt. Wie oben gezeigt wurde, haben nämlich die Ausdrücke  $\phi_r$  ganz bestimmte eindeutige Werte. Daher muss auch der an sich im Allgemeinen  $r$ -wertige Ausdruck  $(\gamma\omega + \delta)^{\frac{12}{r}}$  in unserer Gleichung eine eindeutig-bestimmte Bedeutung haben. Es gilt also, aus den sämtlichen möglichen Werten dieses Ausdrucks in jedem

Fälle denjenigen auszusondern, der in der vorstehenden Gleichung gemeint ist. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir jeder Substitution  $(\frac{\alpha}{\beta})$  eine Einheitswurzel zuordnen, also auf eine durchaus zahlen-theoretische Frage.

In dem Werke über Moduln ist diese Frage bei Seite gelassen, dagegen spielt sie anderweitig in der Litteratur eine wichtige Rolle, namentlich im Falle  $r=8$  in der Theorie der J-Functionen und im Falle  $r=24$  in den Arbeiten von Dedekind und Weber, wo die betr. Function  $\sqrt[r]{\varphi(w)}$  mit  $\eta(w)$  bezeichnet wird.

Nehmen wir geradezu  $r=\infty$ , so tritt  $\lg \varphi(w)$  als eine wichtige Modulfunction im erweiterten Sinne in die Betrachtung ein, auch sie ist in  $w$  eindeutig. Die Functionalgleichung

$$\lg \varphi\left(\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}\right) = 12 \lg(\gamma w + \delta) + \lg \varphi(w)$$

setzt wieder eine an sich viellen,

ings (u. gr. hier unendlich vieldeuti-  
ge) Function mit eindeutigen Funda-  
menten in Beziehung. Es stellt also  
die interessante Frage, nach welchem  
Gesetz aus den unendlich vielen Wer-  
ten des Logarithmus derjenige aus-  
gesucht werden muss, welcher die  
vorstehenden Gleichung genügt.

In der Litteratur tritt die Function  
 $\lg \varrho(w)$  beispielsweise in der  
Kronecker'schen Grenzformel  
auf, welche wir im Sommer ken-  
nen lernen werden.

Hiermit schließen wir unsere kur-  
ze Digression über die elliptischen  
Functionen, bez. elliptischen Modul-  
functionen. Wir haben ja nichts Voll-  
ständiges geben können. Aber viel-  
leicht sind unsere Bemerkungen  
doch geeignet, soweit in die Theo-  
rie einzuführen, dass die erste  
Schwierigkeit, welche der aus-  
serst weitschichtige Stoff darzu-  
bieten pflegt, überwunden ist.

An Ihnen wird es nun sein, wäh-  
rend der Osterferien den so gewon-  
nenen Ansatz durch speciellere  
Studien zu entwickeln. In der  
That werden wir im Sommersemester  
gar nichts machen können, wenn es  
uns nicht gestattet sein soll, hier  
und dort auf die Theorie der  
elliptischen Functionen zu recur-  
riren.

---



Ausgewählte Kapitel  
der  
Zahlentheorie II.

---

Vorlesung,  
gehalten im Sommersemester 1896

von  
F. Klein.

---

Ausgearbeitet von A. Sommerfeld und Ph. Furtwängler.

---

GÖTTINGEN 1897.

---







# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung.	
Die allgemeine Fragestellung betr. singuläre elliptische Gebilde . . . . .	1
Bemerkungen über Moduln höherer Stufe und die zugehörige Definition der relativen Äquivalenz quadratischer Formen . . . . .	6
Von der Kronecker'schen Grenzformel . . . . .	14
Erster Hauptteil: Von der Transformation höherer Ordnung der elliptischen Funktionen.	
<b>1. Die Transformation bei der Gitterfigur.</b>	
Das allgemeine Problem der eingelagerten Gitterzahl und Auswahl der Repräsentanten . . . . .	18
Zusammenfassung der ganzzahligen Gitter mit gemeinsamer Stamm- discriminante (die $h$ Stämme und ihre Zweige) . . . . .	32
<b>2. Die Transformation der Grössen erster Stufe.</b>	
Die Transformationsgleichung $F(J', J) = 0$ auf Grund des Fundamental- polygons . . . . .	34
Einführung von $j = 1728 J$ . Besondere Eigenschaften von $F(j', j) = 0$ . Überleitung zur Multiplicatorgleichung erster Stufe. . . . .	48
	61
<b>3. Die Transformation von Grössen höherer Stufe.</b>	
Allgemeine Erläuterungen, insbesondere betreffend $\zeta$ . . . . .	73
Einiges über die Transformationstheorie des $\zeta$ (die Hauptgleichung und die $59$ Nebengleichungen) . . . . .	79

## Zweiter Hauptteil: Von der Composition der zu derselben Discriminante gehörigen ganzzahligen Gitter (insbes. für Stammdiscriminanten).

### 1. Elementare Constructionen.

Verabredungen beim Hauptgitter; die Gitterzahlen als ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{A}$ . . . . .	94
Vorläufiges über Nebengitter: Conjugierte Lage conjugierter Gitter . . . . .	108
Orientierung der Ancepsgitter . . . . .	114

### 2. Composition der Gitter (speciell der Stammgitter).

Definitionen . . . . .	118
Allgemeiner Satz über die Composition zweier Stammgitter . . . . .	123
Die Arndt'schen Formeln . . . . .	129
Composition der Formen; Corollar der Gittercomposition . . . . .	131
Specielle Fälle . . . . .	134
Die $h$ Stammgitter als eine Gruppe vertauschbarer Elemente . . . . .	143
Zahlenbeispiele . . . . .	150
Die Normalfigur der $h$ orientierten Gitter . . . . .	157

### 3. Die Teilbarkeitsgesetze im Gebiete der orientierten Gitterzahlen.

Der allgemeine Ansatz: Einheiten und Primzahlen . . . . .	172
Die Grundoperationen im Gebiete der Gitterzahlen . . . . .	176
Beziehungen zu Dedekinds Idealtheorie; Bildgitter . . . . .	180
Beziehung zwischen den Gitterzahlen und ihren Bildgittern . . . . .	184
Vergleich der Dedekind'schen Definition der Idealgitter mit der unsrigen . . . . .	189
Verallgemeinerung der Idealtheorie (Nebengitterideale) . . . . .	193
Gleichwertigkeit der Gitterzahlen und der entsprechenden Idealgitter bezüglich der Teilbarkeit . . . . .	198
Algorithmus zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Teilers zweier Gitterzahlen . . . . .	200
Die einfachen Gesetze der Faktorenerlegung . . . . .	206
Allgemeine Aufzählung der vorhandenen Primfaktoren . . . . .	209

### 4. Andeutung über die Zweiggitter . . . . .

## Dritter Hauptteil: Von den singulären elliptischen Gebilden.

### 1. Einleitung.

Bezeichnungen . . . . .	222
Der Fundamentalsatz betr. die Übereinstimmung gewisser transformierter Gitter mit den Idealgittern . . . . .	225

### 2. Die singulären $j$ .

Die Bedeutung des Fundamentalsatzes für die Wurzeln der Transformations- gleichung $F(j', j) = 0$ und die zugehörige Multiplikatorgleichung	229
Bestätigungen im Falle $d = -3$ . . . . .	237
Von den Transformationen $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $j' = j$ liefern . . . . .	250
Die Funktion $j' - j$ auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche und die Klassenzahlrelation erster Stufe . . . . .	262
Die Herstellung der Klassengleichung $\chi^{(j)} = 0$ . . . . .	276
Die Klassengleichung als Abel'sche Gleichung im Bereiche $\sqrt{-d}$ . . . . .	285
Andeutungen über den Klassenkörper (erster Stufe) . . . . .	306

### 3. Die singulären Werte der Ikosaederirrationalität.

Erneute Betrachtung der zum Ikosaeder gehörigen Transformations- gleichungen . . . . .	315
Die Gleichungen $f \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} (\zeta', \zeta) = 0$ und $\Psi \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} (r_g) = 0$ . . . . .	319
Die Klassengleichungen fünfter Stufe . . . . .	349
Schlussbemerkung . . . . .	353



Vertical line on the right side of the page.

## Einleitung.

Do. 23.4.96. Unsere Hauptaufgabe im kommenden Semester wird es sein, dem wunderbaren Zusammenhange nachzugehen, welcher zwischen der Theorie der definiten binären quadratischen Formen und der Theorie der elliptischen Functionen besteht. Der Zusammenhang wird unmittelbar verdeutlicht durch die gemeinsame geometrische Vorstellung des Gitters, welche wir in dem ersten Theile dieser Vorlesung der Behandlung der quadratischen Formen zu Grunde legten und welche sich beim Studium der elliptischen Functionen von selbst darbietet. Indem wir bei unserem Gitter die Punkte und nicht die verbindenden Geraden als das wesentliche ansahen, kamen wir dazu, in der Zahlentheorie das Äquivalenzproblem voranzustellen und alle diejenigen Formen als gleichwerthig in eine Klasse zusammenzufassen, welche zu demselben Punktgitter gehö-

2.

ren. In der Functionentheorie entspricht diesem Standpunkte, dass wir die elliptischen Functionen nicht allein durch die Periodicität in der Variabeln  $u$  definiren, sondern dass wir auch ihre Abhängigkeit von den Perioden  $\omega_1, \omega_2$  betrachten und sie durch ihr Verhalten gegenüber den linearen Periodentransformationen

$$\left. \begin{aligned} \omega'_1 &= \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 \\ \omega'_2 &= \gamma \omega_1 + \delta \omega_2 \end{aligned} \right\} \alpha \delta - \beta \gamma = 1$$

characterisiren. Die elliptischen Functionen sind hiernach Functionen dreier Variabeln  $u, \omega_1, \omega_2$ , welche durch gewisse Invarianteneigenschaften ausgezeichnet sind.

Wir sehen uns jedoch gezwungen, in der Folge noch einen Schritt weiter zu gehen; wir werden nur solche elliptischen Functionen untersuchen, in denen  $u$  überhaupt nicht vorkommt, werden uns also auf elliptische Modulfunctionen beschränken. Wir haben schon gegen Ende des vorigen

Semesters betont, daß wir diese Beschränkung, welche ja auch in den „Vorlesungen über Modulfunctionen“ zu Grunde liegt, an sich durchaus nicht für wünschenswerth halten. Sie bringt es mit sich, daß sehr interessante Abschnitte der Theorie, so die Theilung der elliptischen Functionen, die allgemeine Transformationstheorie, nicht zur Sprache kommen werden. Indessen ist bei der Kürze der Zeit eine gewisse Auswahl des Stoffes durchaus geboten. Alles dieses wurde schon zum Schlusse des vorigen Semesters in seinen allgemeinen Umrissen erläutert, und es wurde auch schon betont, nach welcher Seite sich das besondere Interesse wendet. Die Sache ist folgende:

In der Zahlentheorie ist man gewohnt, die Coefficienten der quadratischen Form als ganzzahlig vorauszusetzen; gerade die wichtigsten Resultate der Theorie beziehen sich auf diesen Fall. Dementsprechend

werden wir unter den elliptischen Gebilden insbesondere solche betrachten, welche zu ganzzahligen quadratischen Formen gehören, in dem Sinne, daß die Form der allgemeinsten Periode des Gebildes

$$(w_1 x + w_2 y)(\bar{w}_1 x + \bar{w}_2 y)$$

gleich einer Form

$$a x^2 + b x y + c y^2$$

mit ganzzahligen Coefficienten wird. Diese Gebilde nennt man nach dem Vorgange von Kronecker singuläre elliptische Gebilde. Es wird sich für uns darum handeln, die besonderen Eigenschaften kennen zu lernen, welche die singulären elliptischen Gebilde gegenüber der Periodentransformation  $n$ ter Ordnung.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= A w_1 + B w_2 \\ \mathcal{A}_2 &= C w_1 + D w_2 \end{aligned} \right\} A D - B C = n$$

aufweisen. Man bezeichnet diesen Gegenstand gewöhnlich kurzweg als die complexe Multiplication



der elliptischen Functionen. Die Bezeichnung rührt daher, daß unter den genannten Transformationen solche vorhanden sind, welche in einer Multiplication der Perioden mit einer complexen Zahl bestehen und daß diese besondere Transformation durch die Abhandlungen von Abel zuerst bekannt geworden ist.

Die Lehre von der complexen Multiplication bildet nach der allgemeinen Ansicht der Mathematiker einen der schönsten und zugleich einen der schwierigsten Theile unserer Wissenschaft. So konnte Camille Jordan in der Einleitung zu seinem Traité des Substitutions die von Kronecker aufgestellten Theoreme „L'envie et le désespoir des géomètres“ nennen. Ich hoffe, Ihnen zeigen zu können, daß infolge der in der Neuzeit erreichten Fortschritte keine eigentliche Schwierigkeit mehr mit dem Gegenstande verbunden ist, man vielmehr die

Haupttheoreme durchaus auf einfachem Wege einsehen kann.

Fr. 24. 4. 96. Bereits im vorigen Semester haben wir von der Stufeneintheilung der elliptischen Modulfunctionen gesprochen. Wir bezeichneten als Functionen der ersten Stufe solche Moduln, welche, wie die Function  $F(w)$ , bei der Gesamtgruppe der linearen Periodentransformationen in sich übergehen. Neben der Gesamtgruppe werden insbesondere diejenigen Untergruppen in Betracht gezogen und als Hauptcongruenzgruppen  $n^{\text{ter}}$  Stufe bezeichnet, deren Substitutionen modulo einer gegebenen Zahl  $n$  der Identität congruent sind.

Für die Hauptcongruenzgruppe der  $2^{\text{ten}}$  Stufe haben wir den Discontinuitätsbereich schon früher bestimmt. Er bestand aus dem Sechsfachen des Discontinuitätsbereiches

7.

der Gesamtgruppe, entsprechend dem Umstande, dass der Index dieser Untergruppe gleich 6 ist. In dem Doppelverhältnisse  $\lambda$  der Verzweigungspunkte des gewöhnlichen elliptischen Integrals erkannten wir einen Hauptmodul zweiter Stufe, d. h. eine Modulfunction, welche in dem genannten Bereiche jeden Werth einmal und nur einmal annimmt. Eine unmittelbare Folge dieser Eigenschaft ist, dass die Gleichung

$$w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \pmod{2}$$

die andere Gleichung

$$\lambda(w') = \lambda(w)$$

nach sich zieht, und dass umgekehrt diese Gleichung das Bestehen jener bedingt. Jede andere Function desselben Fundamentalbereiches wird eine rationale Function von  $\lambda$ , insbesondere ist  $\mathcal{F}$  eine rationale Function 6<sup>ten</sup> Grades.

des:  $\mathcal{F}(w) = R_6(\lambda)$ . Die Existenz eines Hauptmoduls zeigt an, dass der Fundamentalbereich zweiter Stufe vom Geschlechte 0 ist, d. h. dass er bei der durch die Kantenzuordnung angegebenen Zusammenbiegung in eine geschlossene Fläche vom Geschlechte 0 übergeht. Es hat dies insbesondere zur Folge, dass die 6 Werthe von  $\lambda$ , welche zu dem nämlichen Werthe von  $\mathcal{F}$  gehören, linear untereinander zusammenhängen. Wegen des Beweises aller dieser Behauptungen vergl. Modulf. I pg. 270 u. ff., sowie die Figur von pg. 72.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Hauptkongruenzgruppen 3<sup>ten</sup>, 4<sup>ten</sup> und 5<sup>ten</sup> Stufe. Auch hier ist das Geschlecht der Discontinuitätsbereiche gleich 0, dagegen wird es für die höheren Stufen grösser als 0. Dem entsprechend giebt es einen Hauptmodul 3<sup>ten</sup>, 4<sup>ten</sup> und 5<sup>ten</sup> Stufe, derselbe wird mit  $\xi(w)$ ,  $\mu(w)$ ,  $\zeta(w)$  bezeichnet und bez. Tetraeder,

Oктаeder-, Ikosaeder-Irrationalität  
 genannt. Die Benennung gründet sich  
 darauf, dass die betr. Discontinuitäts-  
 bereiche auf dieselbe Weise in Disconti-  
 nuitätsbereiche der Gesamtgruppe  
 zerfallen, wie die Kugel bei den Ge-  
 liebs-eintheilungen der regulären  
 Körper. Im demselben Sinne gehört  
 der Modul  $\lambda$  zum „Diäder“  $n=3$ .  
 Man vergleiche hierzu „Modulf“  
 I pag. 354, 355, 356, wo die Figuren  
 in der  $w$ -Ebene, und pag. 104, 76,  
 106, wo die entsprechenden Figuren  
 auf der Kugel dargestellt sind.  
 Die Zerlegung der Discontinuitäts-  
 bereiche in Unterbereiche geht Hand  
 in Hand mit der algebraischen Ab-  
 hängigkeit der Modulen höherer Stu-  
 fe von dem Modul  $\mathfrak{F}$ . Wir wollen  
 die Beziehung für die 5<sup>te</sup> Stufe expli-  
 cite angeben. Der zugehörige Disc.  
 besteht aus 60 Disc. der Gesamt-  
 gruppe; daher wird  $\mathfrak{F}$  eine rationa-  
 le Function 60<sup>ten</sup> Grades von  $\mathfrak{F}$ .  
 Wir schreiben dieselbe in der Ge-

Gestalt einer fortlaufenden Proportion  
folgendermassen an:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}: (\mathcal{Y}-1) : 1 &= \left[ -\{^{20} - 1 + 228(\{^{15} - \{^5) - 494\{^{10}} \right]^3 \\ &: - \left[ \{^{30} + 1 + 522(\{^{25} - \{^5) - 1005(\{^{20} - \{^{10}) \right]^3 \\ &: 1728\{^5(\{^{10} + 11\{^5 - 1)^5. \end{aligned}$$

Vergl. hierzu „Moduln“ I pag. 105 und II  
pag. 383.

Die vorstehende Gleichung heisst die  
Ikosäidergleichung; sie definiert  $\{$  als al-  
gebraische Function von  $\mathcal{Y}$ .

Wir werden von der Ikosäiderirrationali-  
tät im Folgenden einen consequenten  
Gebrauch machen. Es zeigt sich ohnehin,  
dass man in der Transformationstheorie  
bei den Moduln der  $n$ -ten Stufe nicht ste-  
hen bleiben kann. In der vorhandenen  
Litteratur kommt bereits häufig das  
Doppelverhältnis  $\lambda$ , dann  $\sqrt{\lambda}$ ,  $\sqrt{\lambda(\lambda-1)}$  etc.  
vor. Demgegenüber werden wir durch-  
gehends die Ikosäiderirrationalität  
bevorzugen.

Wir haben in der Einleitung betont,  
dass der zahlentheoretische Äquiva-

lenzbegriff der Invarianteneigenschaft der elliptischen Functionen genau entspricht. Dies trifft jedoch zunächst nur hinsichtlich der Modulfunctionen  $n$ ter Stufe zu. Um auch die Modulfunctionen höherer Stufen für die Zahlentheorie fruchtbar zu machen, müssen wir den Äquivalenzbegriff verfeinern. Neben der Äquivalenz schlechtweg werden wir die relative Äquivalenz modulo  $n$  stellen, indem wir die zu betrachtenden Substitutionen, welche die eine Form in die andere überführen sollen, auf die Hauptcongruenzgruppe  $n$ ter Stufe beschränken. Es entsteht insbesondere die Frage: Wann sind zwei quadratische Formen negativer Discriminante in diesem Sinne relativ äquivalent?

Die Beantwortung dieser Frage ist in unsern Modulfiguren der  $w$ -Ebene vollständig enthalten. In der That geben dieselben in allen Fällen ein geeignetes „Reductionsverfahren“ zur Entscheidung der Äqui-

valenz. Die einzelne Form wird in der  $w$ -Ebene durch dasjenige Paar conjugirter Punkte dargestellt, für welches  $aw^2 + bw + c$  verschwindet. Handelt es sich um die gewöhnliche Aequivalenz, so giebt es eine und nur eine Substitution der Gesamtgruppe, welche einen Punkt des Paares in den Ausgangsraum der Dreiecksstellung überführt. Zwei Formen waren nun äquivalent, wenn sie bei der hierdurch definirten Reduktion denselben Punkt des reducirten Raumes ergaben. In ganz entsprechender Weise werden wir verfahren, wenn nach der relativen Aequivalenz zweier Formen gefragt ist. Wir dürfen dann bei der Reduktion nur die Substitutionen der betr. Untergruppe benutzen. Durch diese gelingt es jedesmal in eindeutiger Weise, die repräsentirenden Punkte der gegebenen Formen in den zu der betr. Hauptcongruenzgruppe gehörigen reducirten Discontinui-



türsber eich zu bringen. Fallen dabei die repräsentirenden Punkte zusammen, so sind die Formen relativ äquivalent, im anderen Falle sind sie es nicht. Um die Reduction wirklich auszuführen, haben wir die erzeugenden Operationen der Untergruppe nach einem bestimmten Gesetze zu combiniren. Diese erzeugenden Substitutionen sind keine anderen, als diejenigen, welche die Kanten des reducirten Discontinuitätsbereiches zusammenordnen.

30.4.96. Wir erwähnten neben den Modulfunctionen der niedersten Stufe in der letzten Stunde des vorigen Semesters bereits einige Modulfunctionen höherer Stufen, welche zu denen der untersten Stufen in einem einfachen algebraischen Verhältniß stehen. Besonders wichtig ist in dieser Hinsicht die in  $\omega_1, \omega_2$  eindeutige Function:

$$\sqrt[12]{\Delta},$$

welche wir, da  $\Delta$  von der ersten Stufe ist, als der ersten Stufe adjun

gibt bezeichneten. In demselben Sinne sind der zweiten Stufe adjungiert beispielesweise:

$$\sqrt[3]{\lambda}, \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}.$$

Eine directe Untersuchung von  $\sqrt[12]{\Delta}$  findet man bei Hurwitz: Math.

Ann. Bd. 18. Vergl. auch Hordulf. I pg. 623.

Wichtig ist für uns u. a., daß  $\sqrt[12]{\Delta}$  in der sog. „Kronecker'schen Grenzformel“ auftritt. Ich kann auch über diesen interessanten Gegenstand hier nur ganz kurz referiren.

Kronecker knüpft an die Untersuchungen von Dirichlet zur Bestimmung der Klassenanzahl an, welche in der Zahlentheorie von Dirichlet, Dedekind, Cap. I, dargestellt sind. Das Charakteristische der Dirichlet'schen Untersuchungen ist das Hineinspielen oder unendlichen Reihen in die Zahlentheorie. Dirichlet betrachtet bei gegebener quadratischer Form  $ax^2 + bxy + cy^2$  die Reihe

$$\sum \frac{1}{(ax^2 + bxy + cy^2)^{1+\beta}}$$

in welcher sich die Summation über alle ganzen Zahlen  $x$  und  $y$  erstreckt, mit Ausnahme des Wertepaares  $x=0, y=0$ . Die Zahl  $\beta$  muss grösser als Null genommen werden, damit die Reihe convergirt. In unserer Quadratischen weise bedeutet die Reihe nichts Anderes als

$$\sum \left(\frac{1}{r^2}\right)^{1+\beta}$$

wo  $r$  die Entfernung der Gitterpunkte von  $O$  ist und wo über alle Gitterpunkte summirt wird. Dirichlet geht dann zum Limes  $\beta=0$  über und zeigt, dass

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \sum \frac{1}{(ax^2 + bxy + cy^2)^{1+\beta}} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}$$

Als Function von  $\beta$  aufgefasst, besitzt also die Dirichlet'sche Reihe für  $\beta=0$  einen einfachen Pol.

Die Leistung von Kronecker besteht nun darin, dass er in der Entwickelung

lung der Reihe nach Potenzen von  $g$   
das nächst folgende Glied bestimmte.  
Es ergibt sich

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi} \sum \frac{1}{(ax^2 + bxy + cy^2)^{1+s}} = \frac{1}{s} + (6 - \log\{(w_1 \bar{w}_2 - w_2 \bar{w}_1) \sqrt{\Delta \bar{\Delta}}\})$$

wo  $C$  eine numerische Constante ist. \*)  
Dieses ist die Kronecker'sche Grenzformel.

Wir fassen dieselbe hier auf als eine Theorie zur Berechnung von  $\sqrt{\Delta}$  und schreiben dementsprechend:

$$\log\{(w_1 \bar{w}_2 - w_2 \bar{w}_1) \sqrt{\Delta \bar{\Delta}}\} = 6 + \frac{1}{s} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi} \left( \sum \frac{1}{(ax^2 + bxy + cy^2)^{1+s}} \right)_{\lim s=0}$$

Merkwürdiger Weise erscheint hier nicht die Function  $\sqrt{\Delta}$ , sondern ihre Form in eine Reihe entwickelt, im Gegensatz zu allen sonst bekannten Reihen der Functionentheorie. Ebenso können wir die rechte Seite als ein Aggregat von Normen auffassen, da nämlich

\*) Hier ist natürlich  $(w_1 \bar{w}_2 - w_2 \bar{w}_1) \cdot \sqrt{\Delta}$ .

$$ax^2 + bxy + cy^2 = |w_1x + w_2y|.$$

Wir kommen also in diesen modernsten Gebieten der Functionentheorie auf die Entwicklung einer Norm, welche nach Functionen von Normen fortschreitet, auf eine reelle Reihe von Functionen reeller Variabler!

Die Kronecker'schen Arbeiten befinden sich an verschiedenen Stellen vgl. insbesondere den Beweis der fortlaufenden Artikelreihe über elliptische Functionen, in den Sitzungsberichten d. Berliner Academie, 1883 N<sup>o</sup> 1-5 und 1885 N<sup>o</sup> 6-10. Weber behandelt die Kronecker'sche Grenzformel in S. 113 seiner elliptischen Functionen.

also, wie schon durch seine Benennung angezeigt wird, grössere Maschen als das ursprüngliche. Man berechnet leicht, dass das neue Elementarparallelogramm  $n$ -mal so gross ist, wie das ursprüngliche.

Statt von den Gittern können wir natürlich auch von den quadratischen Formen sprechen. So geschieht es bei Gauss. Gauss betrachtet neben der Form

$$f = a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$$

die andere

$$F = A X^2 + B X Y + C Y^2 = (\beta_1 X + \beta_2 Y)(\bar{\beta}_1 X + \bar{\beta}_2 Y),$$

in welcher die  $\beta$  mit den  $\omega$  durch die Substitution  $\mathcal{V}$  zusammenhängen. In Folge dessen haben wir:

$$F = (\omega_1 (a_1 X + c_1 Y) + \omega_2 (b_1 X + d_1 Y)) (\bar{\omega}_1 (a_1 X + c_1 Y) + \bar{\omega}_2 (b_1 X + d_1 Y)).$$

Dies ist aber nichts Anderes, als der vorstehende Ausdruck für  $f$ , falls wir eintragen:

$$2) \begin{cases} x = aX + cY \\ y = bX + dY \end{cases} \quad 21.$$

Hienach können wir sagen: Es entsteht  $F$  aus  $f$ , wenn wir die Größen  $X$  und  $Y$  durch die Transformation 2) von der Determinante  $n$  substituieren und nach Potenzen der Größen  $X$  und  $Y$  ordnen.

Eine in solcher Weise abgeleitete Form  $F$  nennt Gauss „in fenthalten“. Diese Bezeichnung entspricht unserer Ausdrucksweise von dem „eingelagerten Gitter“. Hinsichtlich der Discriminante er. giebt sich

$$D_F = n^2 D_f.$$

Diese Gleichung kommt auf unsere obige Angabe über den Flächeninhalt der Elementarparallelogramme hinaus.

Wir werden unversererts aber hier wie auch sonst lieber bei den Gittern bleiben. Der Übergang

zu den Formen würde bedeuten, daß wir die einzelne Gitterzahl jedesmal mit einem Factor, der conjugirten Gitterzahl, multipliciren. Dadurch würden wir die Betrachtung unnöthig beschwerlich machen.

Wir geben zunächst eine Eintheilung unserer Transformationen nach der Größe des gemeinsamen Theilers, welcher in den Coefficienten der Gleichung 1) enthalten ist.

Ein besonders einfacher Fall ist der, wo nach Absonderung des gemeinsamen Theilers die Determinante der Coefficienten gleich 1 wird. In diesem Falle können wir (ev. durch Übergang zu einem äquivalenten Periodenpaar  $\omega_1, \omega_2$ ) der Transformation die Form geben:

$$\begin{array}{l|l} \Omega_1 = m \omega_1 & n = m^2 \\ \Omega_2 = m \omega_2 & \end{array}$$

Wir haben dann die gewöhnliche Multiplication vor uns.

Das entgegengesetzte Extrem findet



statt, wenn die Coefficienten  $a, b, c, d$  überhaupt keinen gemeinsamen Theiler haben. Wir sprechen dann von einer eigentlichen Transformation  $n$  ter Ord.,  
 rung. Zwischen diesen äußersten Fällen gibt es Zwischenstufen, welche man als gemischte Transformationen bezeichnen kann. Hierunter verstehen wir unter  $\tau$  einen quadratischen Theiler von  $n$  verstanden, Transformationen von der Form:

$$\begin{array}{l} \Lambda_1 = \tau(a'w_1 + b'w_2) \\ \Lambda_2 = \tau(c'w_1 + d'w_2) \end{array} \quad \Bigg| \quad n \cdot \tau^2(a'd' - b'c'),$$

wo nun  $a', b', c', d'$  theilerfremd sein sollen.

Sodann beschäftigen wir uns mit der Frage:

Wie viel verschiedene Gitter giebt es, welche durch Transformation  $n$  ter Ordnung einem gegebenen Gitter eingelagert werden können?

Die Antwort lautet verschieden, je nachdem wir nach Parallelgittern oder nach Punktgittern fragen.

Parallelgitter giebt es natürlich in unendlicher Anzahl. Um sie aufzustellen, brauchen wir nur die Diophantische Gleichung

$$a d - b c = n$$

in allgemeinsten Weise zu lösen, welche unendlich viele Wurzeln hat.

Um die Anzahl der Punktgitter zu finden, gehen wir von irgend einem Parallelgitter, d. h. von irgend einem Lösungssystem  $a, b, c, d$  aus. Auf dieses wenden wir eine Transformation erster Ordnung an, wodurch das Punktgitter nicht verändert wird. — Wir setzen also:

$$\mathcal{N}'_1 = \alpha \mathcal{N}_1 + \beta \mathcal{N}_2 = (\alpha a + \beta c) w_1 + (\alpha b + \beta d) w_2$$

$$\mathcal{N}'_2 = \gamma \mathcal{N}_1 + \delta \mathcal{N}_2 = (\gamma a + \delta c) w_1 + (\gamma b + \delta d) w_2$$

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 1.$$

Wir wollen nun diese  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  dazu benutzen, um die Coefficienten des letzten Gliedes möglichst zu vereinfachen

chen, oder anders ausgedrückt, wir wollen unter der Schaar der äquivalenten Gitter ein bestimmtes aussuchen von besonders einfacher Gestalt. Dieses nennen wir den Repräsentanten der Klasse. Wir haben dann, um die Anzahl der verschiedenen Gitter zu finden, nur nöthig, die Repräsentanten abgezählt. Ueber die  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  verfügen wir folgendermassen. Wir bestimmen  $\gamma$  und  $\delta$  aus der Gleichung

$$\gamma\alpha + \delta c = 0$$

als theilerfremde Zahlen. Es ist dann immer möglich, Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  zu finden, so dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

wird. Unsere Transformation lautet jetzt:

$$\begin{array}{l} N'_1 = A w_1 + B w_2 \\ N'_2 = \quad \quad D w_2 \end{array} \quad \Bigg| \quad A D = n.$$

Dasselbe Verfahren wenden wir von Neuem an, indem wir  $N'_1, N'_2$  linear

Unter diesen befinden sich jedoch auch uneigentliche Transformationen. Die Anzahl der eigentlichen wird, wie wir hier kurz angeben wollen:

$$\psi(n) = n \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots$$

Dabei wird noch berücksichtigt

$$\phi(n) = \sum \psi\left(\frac{n}{\tau^2}\right).$$

Wenn wir nämlich  $n$  der Reihe nach von seinen quadratischen Theilern ( $\tau$ ) befreien und alle eigentlichen Transformationen von der Ordnung  $\frac{n}{\tau^2}$  bilden, so erhalten wir in der Summe alle Transformationen von der Ordnung  $n$ .

Nach den vorstehenden Formeln können wir die folgende kleine Tabelle aufstellen:

$n =$	2	3	4	5	6	8	12
$\psi =$	3	4	6	6	12	12	24
$\phi =$	3	4	7	6	12	15	28

Vom arithmetischen Standpunkte sind die bisher besprochenen Repräsentanten die einfachsten, wir bezeichnen

sie als arithmetische Repräsentanten.  
Für die Zwecke der Functionentheorie nehmen wir aber besser eine kleine Änderung vor.

Es sei  $n = p$ . In diesem Falle lassen wir die ersten  $p$  der pg. 21 hingeschriebenen Repräsentanten ungeändert. Bei dem letzten derselben aber vertauschen wir  $\mathcal{N}_1$  mit  $\mathcal{N}_2$  und  $\mathcal{N}_2$  mit  $\mathcal{N}_1$ , was auf eine Transformation  $p$ -ter Ordnung hinauskommt, so daß  $\mathcal{N}_1 = -w_2$ ,  $\mathcal{N}_2 = pw_1$  wird. Unsere  $p+1$  Transformationen sind dadurch auf die gemeinsame Form gebracht:

$$\mathcal{N}_1 = (\alpha w_1 + \beta w_2) \quad \left| \quad \alpha \mathcal{J} - \beta \gamma = 1. \right.$$

$$\mathcal{N}_2 = p(\gamma w_1 + \mathcal{J} w_2)$$

Entsprechendes läßt sich allgemein erreichen. Sei  $n$  eine beliebige Zahl und  $n = \tau^2 n'$ . Alsdann kann man die Repräsentanten so umschreiben, daß

$$\mathcal{N}_1 = \tau(\alpha w_1 + \beta w_2) \quad \left| \quad \alpha \mathcal{J} - \beta \gamma = 1. \right.$$

$$\mathcal{N}_2 = \tau n'(\gamma w_1 + \mathcal{J} w_2)$$

Die in solcher Weise ausgewählten Transformationen nennen wir die fundamentale arithmetischen Repräsentanten. Wir werden dieselben bald benutzen.

Die bisherigen Erörterungen bezogen sich auf ganz beliebige Gitter. Wir gehen nun auf „ganzzahlige Gitter“ ein, d. h. auf solche, in denen  $a, b, c$  und in's Besondere

$$D = b^2 - 4ac.$$

ganze Zahlen sind. Während im allgemeinen Falle jedes Punktgitter für sich dasteht, treten, wie mehrfach betont, die ganzzahligen Gitter von gleicher Discriminante zu einem Organismus zusammen. Wir bezeichnen die Anzahl der Punktgitter gleicher Discriminante mit  $h$  oder  $H$ , je nachdem wir nur die primitiven, oder überhaupt alle Punktgitter in Rechnung bringen. Dabei besteht ersichtlich die Relation:

$$H(D) = \sum h \left( \frac{D}{\tau^2} \right),$$

unter  $\tau$  einen quadratischen Teiler von  $D$  verstanden.

Wir können aus jedem dieser Gitter durch Transformation  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $\phi(n)$  neue Gitter erhalten, welche die Discriminante  $n^2 D$  besitzen werden. Die Frage liegt nahe, ob durch Transformation  $n^{\text{ter}}$  Ordnung überhaupt alle Gitter der Discriminante  $n^2 D$  aus den Gittern der Discriminante  $D$  erhalten werden. Diese Frage wird durch eine Untersuchung von Lipschitz (vergl. Quelle Bd. 53, 1867) beantwortet.

Hierauf können wir bei dem Studium der ganzzahligen Gitter folgen, dermassen verfahren: Wir bemerken zunächst, dass jede Discriminante die Form hat:  $4V+1$  oder  $4V$ . Solche Discriminanten, welche nicht durch Transformation höherer Ordnung aus kleineren Discriminanten entstehen können, bezeichnen wir nach Weber als Stammdiscriminanten. Hiernach werden Stammdiscriminanten sein Discr. von der Form  $4V+1$ , falls sie ohne quadratischen Theiler

sind und Discrimin. von der Form  $4V$ , falls  $V$  keinen quadratischen Theiler enthält und falls nach Forthebung der 4 eine Zahl übrig bleibt, welche keine Discriminante sein kann, d. h. eine Zahl von der Form  $4V'+2$  oder  $4V'+3$ . Wir construiren jetzt zu allen Stammdiscriminanten die zugehörigen Gitter, welche nothwendig sämtlich primitiv werden, so dass  $h = H$  wird. Dies sind unsere „Stammgitter“. In die Stammgitter lagern durch Transformation  $n$ ter Ordnung neue Gitter ein, wobei wir  $n$  alle Zahlen  $2, 3, 4 \dots$  durchlaufen lassen. Hierdurch kommen wir zu je  $\Phi(n)$  „Zweigittern“. Auf diese Weise ergibt sich eine systematische Aufzählung der ganzzahligen Gitter nach ihrem inneren Zusammenhange.

---

Wir betrachten nun die funktio-  
nentheoretische Seite unseres  $\Pi$ .



blems. Gegeben sei ein elliptisches Gebilde durch seine Perioden  $w_1, w_2$ , die Invarianten  $g_2, g_3$  bez. die absolute Invariante  $J$ . Wir nehmen eine Transformation  $n$ ter Ordnung mit den Perioden vor, durch welche sich  $g_2, g_3, J$  in  $g'_2, g'_3, J'$  verwandeln mögen. Es entsteht die Frage, wie diese neuen Grössen mit den alten zusammenhängen.

Zunächst handelt es sich um die Function  $J(w)$ . Da dieselbe nur von dem Periodenquotienten abhängt, so wird dieselbe durch eine blosser Multiplication der Perioden überhaupt nicht geändert. Aus demselben Grunde brauchen wir überhaupt nur die eigentlichen Transformationen zu berücksichtigen, indem ein etwaiger gemeinsamer Factor  $\tau$  der Transformationsgleichungen für  $N_1, N_2$  im Quotienten von selbst herausfällt. Hiernach giebt es zu jedem Werthe von  $J$  für jedes  $n$  im Ganzen  $\gamma(n)$  transformirte Werthe.

36.

$\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2, \dots, \mathcal{F}'_{\mathcal{F}(n)}$

welche die allgemeine Form haben:

$$\mathcal{F} \left( \frac{\alpha \omega + \beta}{n(\gamma \omega + \delta)} \right),$$

wo unter  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  die Werte dieser Größen aus den functionenth. Reprä-  
sentanten zu verstehen sind.

Die Frage ist, wie diese Werte  $\mathcal{F}'$   
mit dem gegebenen  $\mathcal{F}$  zusammen-  
hängen.

In indirecter Weise kann man natür-  
lich den Zusammenhang dahin defi-  
niren: Man suche zu dem gegebenen  
 $\mathcal{F}$  die zugehörigen Werte des Argumen-  
tes  $\omega$ , welche sämmtlich aus einem  
von ihnen  $\omega_0$  durch die linearen  
Substitutionen  $\omega = \frac{\alpha \omega_0 + \beta}{\gamma \omega_0 + \delta}$  hervorgehen.  
Man bilde nun  $\frac{\omega}{n}$  und behalte von  
den unendlich vielen Werten von  
 $\frac{\omega}{n}$  nur die nicht äquivalenten bei.  
Als solche kann man direct die  $\mathcal{F}(n)$   
functionentheoretischen Repräsen-  
ten wählen. Endlich bestimme man  
die Werte von  $\mathcal{F}'$ , welche diesen  $\mathcal{F}(n)$   
Argumenten entsprechen. So erhält

man die geachteten Werthe  $\mathcal{F}'$ :

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\left(\frac{w}{\gamma}\right),$$

dies ist natürlich nur eine von  $\mathcal{V}(n)$  verschiedenen Darstellungen.

§. 5. 96. Wir wünschen aber den Zusammenhang in directerer Form anzugeben, indem wir, ohne auf das Argument  $w$ , zu recurriren, die Werthe  $\mathcal{F}'$  in ihrer Abhängigkeit von dem gegebenen Werthe  $\mathcal{F}$  darstellen. In dieser Hinsicht werden wir den folgenden Satz beweisen, den wir zunächst nur für den Fall, daß der Transformationsgrad eine Primzahl ( $n = p$ ) ist, aussprechen:

$\mathcal{F}'$  ist eine  $(p+1)$ -werthige irreduzible algebraische Function von  $\mathcal{F}$ .

Der Beweis stützt sich auf functionentheoretische Betrachtungen in der  $w$ -Ebene. Wir constatiren erstens, daß vermöge der obigen Darstellung  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\left(\frac{w}{\gamma}\right)$  eine eindeutige Function von  $w$  ist. \*)

\*) Nimmt man  $\mathcal{F}'(\mathcal{F})$  in voller Allgemeinheit, indem man von irgend einem zu  $\mathcal{F}$  gehörigen  $w$  zu einem beliebigen  $\frac{w}{t}$  übergeht, so erhält man  $\mathcal{V}(n)$  getrennte eindeutige Functionen von  $w$  nebeneinander.

Wir fragen sodann, bei welchen Substitutionen der  $(\alpha, \beta)$ -Gruppe unser  $\mathcal{F}'$  un-  
geändert bleibt. Offenbar bei allen sol-  
chen Substitutionen und nur bei sol-  
chen, welche für das Argument  $\frac{w}{p}$   
eine ganzzahlige Substitution von  
der Determinante 1 oder wie wir  
kürzer sagen, eine ganzzahlige „uni-  
modulare“ Substitution darstellen.

Setzen wir also statt  $w$  ein  $\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$ ,  
so müssen in

$$\frac{\alpha w + \beta}{p(\gamma w + \delta)} = \frac{\alpha \frac{w}{p} + \frac{\beta}{p}}{\gamma \frac{w}{p} + \delta}$$

die Coefficienten von  $\frac{w}{p}$  ganze Zahlen  
von der Determinante 1 sein. Hierauf  
ist, wie man sieht, erforderlich und  
hinreichend, daß

$$\beta \equiv 0 \pmod{p}$$

wird. Die Substitutionen, welche  
dieser Bedingung genügen, bilden eine  
Untergruppe der gesammten  $(\alpha, \beta)$ -  
Gruppe, welche, da sie durch eine Con-  
gruenz definiert ist, als Congruenz-  
gruppe zu bezeichnen sein wird.

Man erinnere sich jetzt, dass  $F(w)$  nur an solchen Stellen der  $w$ -Ebene denselben Werth annimmt, welche durch eine Substitution  $(\gamma, \beta)$  zusammenhängen. Daraufhin können wir unser Resultat so aussprechen:

Ein und dasselbe Wertepaar  $(Z', Z)$  findet sich in der  $w$ -Ebene an solchen und nur an solchen Stellen wieder, welche relativ zu der Congruenzgruppe  $\beta \equiv 0 \pmod{p}$  äquivalent sind.

Wir zeichnen sodann den Discontinuitätsbereich unserer Untergruppe. Unter den durch  $(\gamma, \beta)$  zusammengeordneten Punkten der  $w$ -Ebene sind nur diejenigen im Sinne unserer Congruenzgruppe nicht-äquivalent, welche zu verschiedenen Wertepaaren  $(Z', Z)$  Anlass geben. Die verschiedenen Werthe von  $Z'$ , welche aus einem gegebenen Werthe von  $Z(w_0)$  durch Transformation  $p$ -ter Ordnung entstehen, haben wir oben durch die functionentheoretischen Repräsentan-

ten charakterisirt. Diese Repräsentanten sind

$$\frac{\omega_0}{p}, \frac{\omega_0+1}{p}, \frac{\omega_0+2}{p}, \dots, \frac{\omega_0+p-1}{p}, -\frac{1}{\omega_0 p}$$

Um eine möglichst symmetrische Gestalt des Discontinuitätsbereiches herauszubekommen, wollen wir dieselben lieber in folgender Weise anordnen:

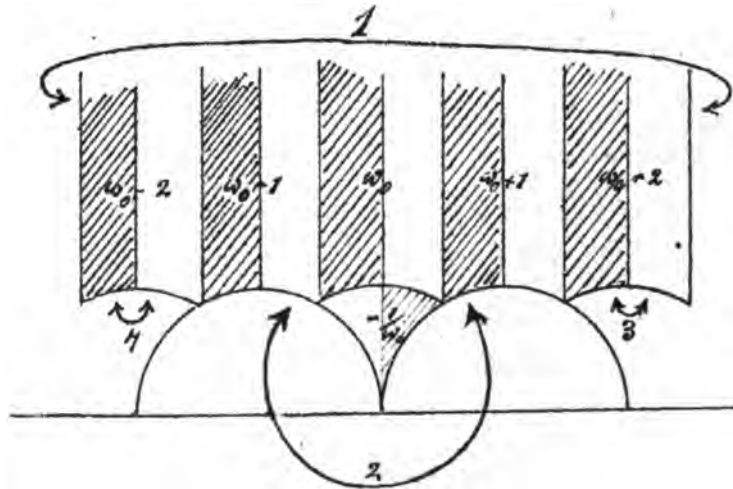
$$\frac{\omega_0 - \frac{p-1}{2}}{p}, \frac{\omega_0 - \frac{p-3}{2}}{p}, \dots, \frac{\omega_0-1}{p}, \frac{\omega_0}{p}, \frac{\omega_0+1}{p}, \dots$$

$$\frac{\omega_0 + \frac{p-3}{2}}{p}, \frac{\omega_0 + \frac{p-1}{2}}{p}, -\frac{1}{p\omega_0}$$

was offenbar gestattet ist, weil diese Werthe den darüberstehenden im Sinne unserer Untergruppe paarweise äquivalent sind.

Wir wollen ferner unter  $\omega_0$  speziell einen im reducirten Dreieck der  $w$ -Ebene gelegenen Werth verstehen. Durchläuft  $\omega_0$  den ganzen reducirten Raum, so beschreiben gleichzeitig die Größen  $\omega_0+1, \omega_0-1, \dots, -\frac{1}{\omega_0}$  je ein anderes Elementardreieck der Modultheorie.

lung. Die untenstehende Figur be-  
zieht sich auf den Fall  $p=5$ , den  
wir für das folgende zu Grunde le-  
gen wollen. Neben dem reducirten  
haben wir hier 5 andere Dreiecke,  
welche b. ex. die Werthe repräsentiren:  
 $\omega_0+1$ ,  $\omega_0-1$ ,  $\omega_0+2$ ,  $\omega_0-2$ ,  $\frac{1}{\omega_0}$ . In  
jeden zwei Punkten des so entste-  
henden Polygons gehören verschiede-  
ne Werthe von  $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ .



Denn einerseits hat  $\mathcal{F}$  nur in sol-  
chen sechs Punkten unseres Polygo-  
nes denselben Werth, welche ver-  
möge der Gesamtgruppe equi-

valent sind. In allen diesen Punkten aber besitzt  $F'$  verschiedene Werthe, weil dieselben verschiedenen functionentheoretischen Repräsentanten entsprechen. Daher werden alle Punkte des Polygoninneren im Sinne unserer Untergruppe nicht-äquivalent. Umgekehrt giebt es zu jedem Punkte ausserhalb des Polygons im Innern einen Punkt, in dem sowohl  $F'$  wie  $F$  dieselben Werthe haben, wie in jenem. Daher umfasst das Polygon auch alle Punkte, welche im Sinne unserer Untergruppe nicht-äquivalent sind. Hat einem Worte: Unser Polygon ist der Discontinuitätsbereich der betrachteten Congruenzgruppe.

Dabei ist noch eine Klausel hinsichtlich der Randpunkte hinzuzufügen. Die Kanten des Polygons sind durch die Substitutionen unserer Untergruppe paarweise einander zugeordnet. Streng genommen dürfen wir daher nur die



Halbte der Begrenzung unseres Polygons hinzurechnen, während wir die andere Hälfte von der Definition des Discontinuitätsbereiches anschließen müssen, wie solches durch stärkeres Ausziehen in der Figur angedeutet ist.

Die Substitutionen, welche die Kanten zusammenordnen sind folgende: Dem Pfeile 1 entspricht offenbar die Substitution:

$$w' = w \pm 5.$$

Der Pfeil 2 bedeutet:

$$-\frac{1}{w'} = -\frac{1}{w} \pm 1 \text{ oder } w' = \frac{w}{7w+1}$$

Endlich gehören zu dem Pfeile 3 und 4 die folgenden Substitutionen von der Periode 2:

$$w' = \frac{2w-5}{w-2}, \quad w' = \frac{-2w-5}{w+2}$$

Dass die angegebenen Substitutionen sämtlich zu unserer Untergruppe gehören, ist klar; dass sie die durch die Figur angegebene Kantenzuordnung leisten, rechnet man leicht

nach.

Diese Substitutionen führen das Polygon je in ein anliegendes relativ-äquivalentes über; bei Wiederholung und Combination derselben wird schliesslich die ganze  $w$ -Halbebene mit einem System analoger Polygone überdeckt. Die angegebenen Substitutionen bilden daher die Erzeugenden unserer Untergruppe einer allgemeinen Regel entsprechend, nach der die Substitutionen, welche die Kanten des Discontinuitätsbereiches zusammenordnen, allemal die erzeugenden Substitutionen der zugehörigen Gruppe darstellen.

Nachdem wir diese gruppentheoretischen Erläuterungen vorangeschickt haben, kommen wir nun zu dem specifisch functionentheoretischen Schlüssen, durch welche wir die Abhängigkeit der Werthe  $\mathcal{F}'$  und  $\mathcal{F}$  bestimmen wollen. Sicherlich ist  $\mathcal{F}'$  im Falle  $p=5$  eine sechswerthige Function von  $\mathcal{F}$ . Um dieses Ab

hängigkeitsverhältniß bequem übersehen zu können, werden wir uns die  $F$ -Ebene mit einer sechsbliättrigen Riemann'schen Fläche überdeckt denken.

Jedem Punkt dieser Fläche entspricht ein Werth des Functionenpaares  $(F', F)$  und umgekehrt. Andererseits sehen wir, daß auch jeder Punkt unseres Polygons ein Wertepaar  $(F', F)$  repräsentirt und umgekehrt jedes Wertepaar  $(F', F)$  einen Punkt des Polygons bezeichnet. Dabei sind sowohl auf der Riemann'schen Fläche wie in unserem Polygon die Wertepaare  $(F', F)$  nach dem Gesetz der Stetigkeit ausgebreitet. In Folge dessen sind die Punkte der Riemann'schen Fläche und die Punkte des Polygons eindeutig und stetig aufeinander bezogen. Polygon und Fläche sind, wie man sagt, aufeinander eindeutig abgebildet. Unser Polygon liefert uns einen Fundamen-

talbereich für die Functionen ( $\mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{F}$ ),  
 d. h. einen genauen Ersatz der Rie-  
 mann'schen Fläche. Die sechs Blätter,  
 welche bei der Riemann'schen Flä-  
 che übereinander liegen, sind in  
 unserem Polygone in übersichtli-  
 cher Weise neben einander aus-  
 gebreitet; sie entsprechen nämlich  
 einzeln den sechs Elementardrei-  
 ecken, aus denen sich unser Poly-  
 gon zusammensetzt. Dabei stellt  
 unser Polygon die geschlossene oder  
 die in zweckmäßiger Weise zermit-  
 tene Riemann'sche Fläche dar, je  
 nachdem wir uns seine Kanten  
 paarweise zusammengeheftet den-  
 ken oder nicht.

§. V. 96. Wir kommen nun zum  
 Beweise der § 97 aufgestellten  
 Behauptungen, daß nämlich  $\mathcal{F}'$   
 eine irreducible algebraische Func-  
 tion von  $\mathcal{F}$  ist. Der Zusammen-  
 hang zwischen  $\mathcal{F}'$  u.  $\mathcal{F}$  wird ein  
 irreducibler, wenn die Riemann's-  
 che Fläche aus einem Stücke be-

steht; er wird ein algebraischer, wenn  $\mathcal{F}$  auf der Riemann'schen Fläche keine wesentliche Singularität besitzt.

Was nun die Behauptung der Irreducibilität betrifft, so sieht man der Riemann'schen Fläche in der Gestalt unseres Polygons sofort an, daß sie in der That aus einem Stücke besteht. Die Lücke würde nur dann anders liegen, wenn unsere Figur aus zwei verschiedenen Theilen bestünde, deren Ranten einzeln unter sich zusammengeordnet wären.

Um zweitens zu zeigen, daß auf der Riemann'schen Fläche keine wesentlichen Singularitäten vorkommen, werden wir nach den allgemeinen Regeln der Functionentheorie verfahren, indem wir zeigen, daß für jeden Werth von  $\mathcal{F}$  in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, welche, wenn überhaupt, nur eine endliche Anzahl von negativen Potenzen

Kennen gelernt, welche nach der Grösse

$$r = e^{2i\pi\omega}$$

fortschreiten und welche im Punkte  $\omega = \infty$  bei Annäherung in der Richtung der imaginären Achse convergiren. Dieselben lauten:

$$12 g_2 \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 = 4 + 240 \sum_1^{\infty} \frac{m^3 r^m}{1-r^m}$$

$$\Delta \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} = r \prod_1^{\infty} (1-r^m)^{24}$$

Hieraus ergibt sich

$$f(\omega) = \frac{1728 g_2^3}{\Delta} = \frac{1}{r} + \psi(r),$$

oder, wenn wir die numerischen Werte der ersten Coefficienten heranziehen wollen:

$$1) f(\omega) = \frac{1}{r} + 744 + 196884 r + \dots$$

Die entsprechende Reihe für  $f'$  erhalten wir, wenn wir bei unserem Beispiele  $p=5$  bleiben, da

durch, dass wir  $\omega$  mit  $\frac{\omega}{5}$ , also  $r$  mit  $r^{\frac{1}{5}}$  vertauschen. Daher wird

$$1') f'(\omega) = \frac{1}{r^{\frac{1}{5}}} + 744 + 196884 r^{\frac{1}{5}} + \dots$$

Enachdem wir  $\frac{\omega}{5} = \frac{\omega_0}{5}, \frac{\omega_0 \pm 1}{5}, \frac{\omega_0 \pm 2}{5}$  nehmen, werden hier die fünf verschiedene Werte von  $\pm \frac{1}{5}$  in Geltung kommen.

Aus dem Punkte  $\omega = \omega_0$  geht der Punkt  $\omega = 0$  hervor, wenn wir  $-\frac{1}{\omega}$  an die Stelle von  $\omega$  treten lassen; dabei geht  $r$  über in

$$r' = e^{-\frac{2\pi i}{\omega}}$$

während  $f$  bei dieser Substitution nicht geändert wird. Die zusammengehörigen Reihenentwickelungen im Punkte  $\omega = 0$  lauten daher:

$$2) f(\omega) = \frac{1}{r'} + 744 + 196884 r' + \dots$$

$$2') f'(\omega) = \frac{1}{r'^{\frac{1}{5}}} + 744 + 196884 r'^{\frac{1}{5}} + \dots$$

Nun können wir aus den Reihen 1) bez. 2)  $r$  bez.  $r'$  durch eine Reihe darstellen, die nach Potenzen von  $\frac{1}{\omega}$  fortschreitet und positive Exponenten aufweist.

Tragen wir diese Reihen in 1) bez. 2) ein, so erhalten wir eine Darstellung von  $f'$ , aus welcher hervorgeht, daß  $f'$  auch in den Punkten der Riemann'schen Fläche, welche den Werthen  $w = \infty$  und  $w = 0$  entsprechen, keine wesentliche Singularität besitzt. In Folge dessen hat  $f'$  auf der Riemann'schen Fläche überhaupt keinen wesentlich singulären Punkt und stellt in der That eine algebraische Function von  $z$  dar.

Das somit abgeleitete Resultat können wir auch folgendermassen formulieren: Wir bilden die sog. Transformationsgleichung

$$F(z'; z)(z' - z_1)(z' - z_2) \dots (z' - z_{p+1}) = 0,$$
 von welcher die Bestimmung der zu einem gegebenen  $z$  gehörigen transformirten Werthe  $z'$  abhängt. In ausgerechneter Form lautet sie:

$$z'^{p+1} + a_1 z'^p + \dots + a_{p+1} = 0.$$

Hier sind nun die Coefficienten



$a$  als symmetrische Function von  $j_1, \dots, j_{p+1}$  in  $\mathfrak{z}$  eindeutig; da sie überdies in  $\mathfrak{z}$  algebraisch sind, so werden sie eindeutige algebraische, d. h. rationale Functionen von  $\mathfrak{z}$ . Wir erkennen also, dass für  $\mathfrak{z}$  eine in  $\mathfrak{z}$  rationale irreducible algebraische Gleichung  $p+1$  ten Grades besteht.

Übrigens liefert unsere Schlussweise, welche von den Figuren in der  $w$ -Ebene ausging, mehr als die blosse Existenz dieser Transformationsgleichung. Sie giebt gleichzeitig die Verzweigungspunkte der zugehörigen Riemann'schen Fläche an und die Art, wie die Blätter in den Verzweigungspunkten zusammenhängen. Vergl. hierzu Rodulph. II pg 36-62; an gegenwärtiger Stelle können wir dies nicht weiter verfolgen.

Wir betonen, dass wir vorstehend zu der Transformationsgleichung nicht sowohl durch Rechnung als vielmehr durch eine Reihe von Überlegungen u. zw. auf directestem Wege gelangt sind.

weise folgt, dass wenn  $z'$  aus  $z$  durch Transformation  $p$ ter Ordnung hervor geht, auch umgekehrt  $z$  aus  $z'$  auf dieselbe Weise erzeugt werden kann. Hiernach wird die Transformationsgleichung  $F(z', z) = 0$  ungeändert bestehen bleiben, wenn wir  $z$  und  $z'$  vertauschen. Wir haben daher:

$$F(z', z) = C F(z, z').$$

Durch Wiederholung der Vertauschung  $z \sim z'$  kommen wir zu

$$F(z', z) = C^2 F(z', z), \text{ d. h. } C^2 = 1, C = \pm 1.$$

Der Werth  $C = -1$  ist auszuschliessen, denn er würde zur Folge haben, dass für  $z' = z$   $F(z, z) = -F(z, z) = 0$  sein müsste, dass also  $F(z', z)$  den Teiler  $z' - z$  besässe, was wegen der Irreducibilität von  $F$  unmöglich ist. Hattin bleibt nur  $C = +1$  übrig, d. h. die linke Seite unserer Gleichung bleibt bei Vertauschung von  $z$  und  $z'$  gänzlich unge-

ändert.

Man bemerke übrigens, dass die genannte Eigenschaft durchaus an dem Umstande haftet, dass  $f$  eine Modulfunction ist und als solche nur von dem Quotienten  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  abhängt. Wenn wir die Transformation  $p$ -ter Ordnung an den Perioden selbst aus, so haben wir bei Zugrundelegung desselben Repräsentanten, wie oben:

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= -\omega_2 \\ \omega'_2 &= p\omega_1.\end{aligned}$$

Diese Operation ist nicht in  $\omega$  und  $\omega'$  symmetrisch; sie führt bei Wiederholung daher nicht zur Identität zurück. Vielmehr ergibt sich, wenn wir noch zweitens hinzunehmen:

$$\begin{aligned}\omega''_1 &= -\omega'_2 \\ \omega''_2 &= p\omega'_1,\end{aligned}$$

zwischen  $\omega''$  und  $\omega$  eine gewöhnliche Multiplication mit  $-p$ , nämlich

$$\begin{aligned}\omega''_1 &= -p\omega_1 \\ \omega''_2 &= -p\omega_2.\end{aligned}$$

Hier kommt man also wie schon Jacobi bemerkt hat, durch Wiederholung der Transformation zu einer Multiplikation.

3. Die numerischen Coefficienten von  $f^{\alpha} f^{\beta}$  werden sämmtlich ganze Zahlen. Die Anzahl derjenigen numerischen Coefficienten ist von vornherein begrenzt. Auf Grund des Satzes 2 kann nämlich jeder der Coefficienten  $a_i$  höchstens bis zum  $p+1$ ten Grade in  $f$  ansteigen. Man kann daher die Größen  $a_i$  mit unbestimmten Coefficienten ansetzen, z. B.

$$a_i = d_{i,0} + d_{i,1} f + d_{i,2} f^2 + \dots + d_{i,p+1} f^{p+1},$$

und diese durch Eintragen der Potenzenentwicklungen von  $f'$  und  $f''$  berechnen. Die Ganzzahligkeit folgt dann aus dem Gesetz der Reihenentwicklungen nach Potenzen von  $x$ , die Einzelheiten vergl. bei Weber.

Das einzige ausgerechnete

Beispiel einer Transformationsgleichung verdanken wir Stephen Smith; derselbe berechnete im Falle  $p=3$  die folgende Relation, in welcher zur Abkürzung  $f' = 256x$ ,  $f = 256y$  gesetzt ist:

$$\begin{aligned} & x(x+2^7 \cdot 3 \cdot 5^3)^3 + y(y+2^7 \cdot 3 \cdot 5^3)^3 - 2x^{16}y^3 - 2^15 \cdot 5^6 \cdot 22973xy \\ & + 2^7 \cdot 3^2 \cdot 31x^2y^2(x+y) = 2^23^39907xy(x^2+y^2) \\ & + 2 \cdot 3^4 \cdot 13 \cdot 173 \cdot 6367x^2y^2 + 2^33^55^34471xy(x+y) = 0. \end{aligned}$$

An diesem Beispiel bewähren sich unsere bisherigen allgemeinen Regeln; wir erkennen aber zugleich, dass wir bei grösseren Werten des Transformationsgrades zu ganz ungeheuerlichen Relationen geführt werden.  
15. I. 96. 4. Die Coefficienten haben aber eine weitere arithmetische Eigenschaft, die wir erwähnen müssen. Man kann nämlich der Transformationsgleichung die Form geben:

$$(j'^p - j)(j^p - j') + \sum_{k=1}^p \sum_{h=1}^p c_{kh} (j'^k j^h + j^k j'^h) + \sum_{k=1}^{p-1} c_{k,p-k} j'^k j^{p-k} = 0.$$

Hier werden sämtliche  $c_{kh}$  ganze durch  $p$  theilbare Zahlen. Der Beweis wird mit Hilfe der oben genannten Reihenentwickelungen von  $j'$  nach der HilfsgröÙe  $r$  geführt. Wir verweisen demhalb auf Weber, Ellipt. Fu. pg. 253-254.

Wenn man daher die Transformationsgleichung modulo  $p$  betrachtet, so reducirt sich ihre linke Seite einfach auf das Product:

$$(j'^p - j)(j^p - j').$$

5. Ist der Grad der Transformation keine Primzahl, sondern eine beliebige zusammengesetzte Zahl, so tritt, was den Grad der Transformationsgleichung betrifft, die zahlentheoretische Function  $\psi(n)$  an die Stelle von  $p+1$ . Im Ubrigen bleiben die aus 2 und 3 genannten Eigenschaften ungcändert bestehen.

Gegenüber dem bisher eingehaltenen Standpunkte, auf welchem wir die Transformation voranstellten, giebt es einen höheren Standpunkt, von dem aus man die Gesamtheit der in  $\mathfrak{z}$  und  $\mathfrak{z}'$  rationalen Functionen in's Auge fasst. Man bezeichnet diese Gesamtheit als den Körper  $(\mathfrak{z}', \mathfrak{z})$ . Wir werden daher in Zukunft diesen Körper betrachten, aus den Functionen dieses Körpers die einfachsten aussuchen und deren algebraischen Zusammenhang mit  $\mathfrak{z}$  entwickeln. Hinterher werden wir dann die Größe  $\mathfrak{z}'$  in rationaler Form durch diese einfachsten Functionen darstellen können.

Der moderne Ausdruck „Functionenkörper“ ist im Grunde identisch mit dem, was man gewöhnlich eine „Riemann'sche Fläche“ nennt.

In der That ist die Gesamtheit der Functionen des Körpers im vorliegenden Falle nichts anderes als die Gesamtheit der auf der Rie.

riemann'schen Fläche  $(\gamma', \gamma)$  eindeutigen und regulären Functionen. Die Beziehung auf die Riemann'sche Fläche ist für uns deshalb von Vortheil, weil wir diese in der Gestalt unseres Kreisbogenpolygons bequem übersehen können. Aus diesem Grunde wird auch in dem Buche über Roodulf. die Terminologie der Riemann'schen Fläche festgehalten. Der Begriff des Körpers hat aber in anderer Hinsicht seine Vorzüge. Man kann nämlich den Functionen des Körpers die Bedingung auferlegen, daß sie nur ganzzahlige Coefficienten haben sollen. Diese Verschärfung des Begriffes läßt sich in dem Bilde der Riemann'schen Fläche nicht gut durchführen.

Wir könnten nun, von den niedersten Fällen beginnend, an der Hand unserer Figuren die Functionen des Körpers  $(\gamma', \gamma)$  discutiren. Statt dessen werden wir hier lieber einen allgemeineren Weg



einschlagen, welcher indirect zu dem oben bezeichneten Ziele führt.

Wir betrachten statt der absoluten Invariante  $f$  die Invarianten  $g_2, g_3, \Delta$ . Bei der Transformation  $n$ ter Ordnung mögen diese übergehen in

$$g_2' = g_2 (aw_1 + bw_2, cw_1 + dw_2), g_3', \Delta'$$

Um zu Modulfunctionen zurückzugelangen, bilden wir

$$\frac{g_2'}{g_2}, \frac{g_3'}{g_3}, \frac{\Delta'}{\Delta},$$

welche Ausdrücke ersichtlich nur von dem Quotienten  $\frac{w_2}{w_1} = w$  abhängen werden. Es zeigt sich sofort dass diese Größen, ebenso wie  $f', \gamma(n)$  verschiedene Werthe besitzen, auf der Riemann'schen Fläche eindeutig sind und keine wesentlichen Singularitäten haben. Auf den Beweis gehen wir nicht weiter ein. Wir constatiren aber, dass die genannten Größen in Folge dessen rationale Functionen von  $f'$  und  $f$  sein

werden und dass sich  $z'$  umgekehrt durch  $z$  und eine der genannten Functionen rational darstellen lässt. Es giebt aber noch einfachere Functionen, als die genannten, welche gleichfalls unserem Körper angehören, nämlich gewisse Wurzeln derselben. Wir bezeichnen

$$N \sqrt[n]{\frac{\Delta'}{\Delta}}$$

mit  $N$  (Multiplicator), auf den Grund dieser Benennung kommen wir später zurück. Dass diese Größe, falls sie unserem Körper angehört, eine einfachere algebraische Function als  $\frac{\Delta'}{\Delta}$  ist, ist klar. Denn die algebraische Gleichung, welcher  $N$  genügt und welche aus der algebraischen Gleichung für  $N$  leicht abgeleitet werden kann, hat jedenfalls eine complicirtere Gestalt wie die letztere.

Die in jedem Fall zu benutzen, die einfachere Function, welche noch

in unserem Körper liegt, geben wir in der folgenden Zusammenstellung an. Dabei beschränken wir uns auf solche Transformationsgrade, welche nicht durch 2 oder durch 3 theilbar sind. Es geschieht dies um nicht zu viele Fallunterscheidungen machen zu müssen. Wir haben daraufhin modulo 12 folgende vier Fälle zu unterscheiden:

$$n \equiv 1, 5, 7, 11 \pmod{12}$$

$$n^{12} \sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \mathcal{A}, \quad n^5 \sqrt[5]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \mathcal{B}, \quad n^7 \sqrt[7]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \mathcal{C}, \quad n^{11} \sqrt[11]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \mathcal{D}$$

☞ Eine Quasiradikalisierung nimmt der Fall ein, wo  $n$  eine Quadratzahl ist. Eine Quadratzahl, welche weder durch 2 noch durch 3 theilbar ist, muss immer  $\equiv 1 \pmod{12}$  sein. Für ein solches  $n$  liegt nicht nur die 12<sup>te</sup>, sondern sogar die 24<sup>te</sup> Wurzel von  $\frac{\Delta'}{\Delta}$  in unserem Körper. Daher wird in diesem

Fälle die einfache Function:

$$\text{vii. } \sqrt[n]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \sqrt[n]{H}$$

Die angegebene Unterscheidung zwischen den verschiedenen Fällen können wir vermeiden, wenn wir unsern Rationalitätsbereich ein wenig erweitern. Wir wollen nicht nur  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ , sondern nach Bedarf auch noch die folgenden einfachen algebraischen Functionen von  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  als rational bekannt ansehen:

$$\sqrt[n]{[3]} = \sqrt[n]{[3]} = \frac{1292}{\sqrt[n]{\Delta}}, \quad \sqrt[n]{[3]} = \sqrt[n]{[3-1728]} = \frac{216 \sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{\Delta}}$$

(in denen natürlich  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  selbst rational darstellbar ist).

Nach Erweiterung des Rationalitätsbereiches wird sich der Kreis der in unserem Körper befindlichen Functionen vergrößert haben.

Es zeigt sich, dass nunmehr  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$

in allen Fällen zu unserem Körper ge-  
hört, d. h. einer Gleichung vom Grade  
 $\varphi(n)$  mit Coefficienten, die in  $f_1, f_2$  und  
 $f_3$  rational sind, genüge leistet.

U. zw. haben wir zu dem Ende im Falle  
 $n \equiv 5 \pmod{12}$ :  $f_2$ , im Falle  $n \equiv 7$ :  
 $f_3$ , im Falle  $n \equiv 11$  sowohl  $f_2$  als  
 $f_3$  zu dem ursprünglichen Rationali-  
 tätsbereich zu adjungieren; im  
 Falle  $n \equiv 1$  ist natürlich eine sol-  
 che Adjunction überflüssig. Es  
 soll daher unser Rationalitätsbe-  
 reich in den Fällen

$n \equiv 1, n \equiv 5, n \equiv 7, n \equiv 11 \pmod{12}$   
 aus den Functionen bestehen:

$f_1, f_2, f_3, f_2, f_3.$

Der Vorzug des „multiplcators“  $\kappa$   
 gegenüber der Grösse  $f'$  besteht  
 in der grösseren Einfachheit der  
 algebraischen Gleichung, durch  
 welche  $\kappa$  bestimmt wird. Wir  
 nennen diese Gleichung „Kau-  
plexorgleichung“; sie lau-  
 tet in den niedrigsten Prim-

zahl. Fällen, soweit sie nicht durch unsere obige Beschränkung ausgeschlossen sind:

$$n = 5 \quad x^6 + 10x^3 - 8x + 5 = 0$$

$$n = 7 \quad x^8 + 14x^6 + 63x^4 + 70x^2 + 8x - 7 = 0$$

$$n = 11 \quad x^{12} - 990x^6 + 44082x^4 - 165x^3 + 228x^2 - 88x - 11 = 0.$$

In diesen Gleichungen kommt das, was oben über den Rationalitätsbereich gesagt ist, zur Geltung. Wir bemerken an ihnen ferner die folgende Regelmässigkeit, welche für einen Primzahlgrad  $n = p$  allgemein gilt: Alle Coefficienten der Gleichung mit Ausnahme des vorletzten sind durch  $p$  theilbar; der letzte Coefficient ist gleich  $\pm p$ , je nachdem  $p \equiv \pm 1 \pmod{4}$ .

21.V.96. Historische Notizen über die Kolligatorgleichung finden sich Modulf. II pag. 80. Wir erwähnen hiervon zunächst, was sich auf

die Bezeichnung „Multiplikator“  
bezieht. Die Grösse  $\kappa$  tritt in dieser  
Hinsicht zum ersten Male auf bei  
Klein, Math. Ann. Bd. 14, 1878,  
u. zw. bei der Transformation der  
elliptischen Integrale in der Weier-  
strassischen Normalform. Offenbar  
ist das Weierstrassische Integral

$$\int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$$

homogen von der 1<sup>ten</sup> Dimension  
in  $\omega_1, \omega_2$ . Um es zu einer Grösse 0<sup>ter</sup>  
Dimension zu machen, kann man  
 $\sqrt{\Delta}$  als Factor hinzufügen. Darauf  
werden wir es als „normirtes Weier-  
strassisches Integral“ bezeichnen.

In der Transformationstheorie ver-  
gleicht man nun zwei Weierstrassische  
Integrale, wobei direct

$$\int \frac{dp'}{\sqrt{4p'^3 - g_2' p' - g_3'}} = \int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$$

Will man aber normirte Integrale  
betrachten, so wird man die vorher-

gehende Gleichung durch die folgende, übrigens genau dasselbe besagende, ersetzen:

$$\int \frac{\sqrt{\Delta'} \cdot dp'}{\sqrt{4p'^3 - g_2'p' - g_3'}} = \frac{16}{n} \int \frac{\sqrt{\Delta} \cdot dp}{\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}}$$

Hier sehen wir, spielt die Grösse  $\frac{16}{n}$  die Rolle eines Multiplikators; sie tritt an die Stelle desjenigen Multiplikators, welcher in der älteren Theorie bei der Transformation der Jacobi'schen Normalintegrale vorkommt.

Die Eigenschaften der Multiplikatorgleichung werden vom Standpunkte der Modulfunctionen, d. h. durch Betrachtungen in der w. Ebene, begründet in der grossen Arbeit von Hurwitz, Math. Ann. Bd. 16, 1881.

Von anderer Seite ist Kiepert zu den Multiplikatorgleichung gekommen, man vergleiche ins Besondere die zusammenfassende



Arbeit:

Kiepert, Math. Ann. Bd. 26, 1885.

Kiepert geht von dem sog. speciellen  
Theilungsproblem der elliptischen  
Functionen aus. Die Grösse  $H$ , (für  
welche K. übrigens  $L^2$  sagt) erscheint  
bei ihm durch die Wurzeln der Thei-  
lungsgleichung

$$p\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right), p'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$$

ausgedrückt. Die Multiplikatorgleichung wird so zu einer Resolvente der Theilungsgleichung. Unter den reichhaltigen Details der Kiepert'schen Arbeiten heben wir ins Besondere hervor, daß hier die Darstellung der Grössen  $g_2, g_3$  bez.  $f'$  durch  $H$ , sowie durch die (als rational bekannt anzusehenden) Grössen  $g_2, g_3$  bez.  $f$  gegeben wird. Es ist dieses die Ausführung zu einer Bemerkung, welche wir auf pag. 61 machten, wonach man unter den Grössen

des Körpers ( $f', f$ ) möglichst einfache (eben unser  $H$ .) aufsuchen und durch diese sowie durch die rational bekannten Größen alle übrigen darstellen sollte. Diese Darstellung wird von Kiepert explicite geleistet.

In dem Buche von Weber wird die Gleichung für  $H$  als „invariante Multipliegleichung“ bezeichnet, weil die Grösse  $H$  mit den „Invarianten“  $g_2, g_3$  zusammenhängt. Diese Bezeichnung scheint uns nicht zweckmässig. Will man die Multipliegleichung für  $H$  von anderen Multipliegleichungen, wie solche ja in der Jacobi'schen Theorie vorkommen, unterscheiden, so sollte man sie als Multipliegleichung 1<sup>ten</sup> Stufe bezeichnen, denn auch die Jacobi'sche Multipliegleichung bleibt bei gewissen  $w$ -Substitutionen invariant, nur nicht bei allen Substitutionen der 1<sup>ten</sup> sondern bei denen der 2<sup>ten</sup> Stufe.

Wir werden jetzt die ganze Frage, Stellung verallgemeinern, indem wir eine Transformationstheorie bei beliebiger Stufenzahl entwickeln.

Hieron handelt ein besonderes Capitel der Moduln. (Bd. II, Cap. 3)

Es sei  $\varphi(w)$  eine Modulfunction etwa von der  $r$ ten Stufe. Bei einer Transformation  $n$ ter Ordnung geht dieselbe über in  $\varphi\left(\frac{w}{n}\right)$ . Hier entsteht nun die Aufgabe, den algebraischen Zusammenhang zwischen  $\varphi\left(\frac{w}{n}\right)$  und  $\varphi(w)$  in ähnlicher Weise zu untersuchen, wie es mit der algebraischen Beziehung zwischen  $f\left(\frac{w}{n}\right)$  und  $f(w)$  geschehen ist.

Das allgemeine Resultat, welches sich in dieser Hinsicht ergibt, lautet folgendermassen:

Solange  $r$  und  $n$  relativ prim sind, liegt alles ähnlich wie bei den Functionen der  $r$ ten Stufe. Besonderheiten treten nur auf, wenn  $r$  und  $n$  einen Theiler gemein

haben. In allen Fällen aber sind die beiden Modulen durch eine algebraische Gleichung verbunden.

Hierzu zunächst einige Beispiele aus der vorhandenen Literatur. Die sog. „Modulargleichung“, welche in der Jacobi'schen Theorie vorkommen, liefern den algebraischen Zusammenhang zwischen dem Modul

$$\sqrt[n]{\lambda(\omega)} = \sqrt[n]{k}$$

und den durch Transformation  $n$ ter Ordnung aus ihm entstehenden Grössen. Der hier betrachtete Modul ist von der 16ten Stufe.

Nach der obigen allgemeinen Bemerkung hat man daher zwischen geradem und ungeradem  $n$  zu unterscheiden. Für ein ungerades  $n$  wird die Theorie der Jacobi'schen Modulargleichung ganz ähnlich ausfallen, wie die Theorie der Gleichung  $F(j', j)$ .

Ferner erwähnen wir die sogen. Schläfli'schen Modulargleichung

75.

Schläfli beschäftigt sich in Crelle  
 Bd. 72, 1870 mit der Transforma-  
 tion des Moduls 48<sup>ter</sup> Stufe

$$\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)} = \sqrt[12]{R R'},$$

welcher bemerkenswerthe einfache  
 Resultate liefert, worauf ins beson-  
 dere Weber in seinem Buche zu-  
 rückgekommen ist. Da 48 die Prim-  
 factoren 2 und 3 enthält, sind hier  
 die geraden und die durch 3 theil-  
 baren Transformationsgrade be-  
 sonders zu behandeln.

In dieser Vorlesung werde ich in-  
 dessen die Transformationstheorie  
 des Moduls  $\zeta(\omega)$ , d. h. der Kosaeder-  
 irrationalität bevorzugen, ohne da-  
 rum behaupten zu wollen, dass  
 dieser Modul interessanter ist  
 als andere. Es ist mehr, dass ich  
 wünsche, die Kosaederirrationali-  
 tät  $\zeta(\omega)$  nach allen Richtungen zur  
 Geltung zu bringen, und dass ich  
 der allgemeinen Untersuchung der  
 höheren Modulen einen neuen An-  
 s.

stofs gehen möchte.

Die Größe  $\zeta(\omega)$  ist wie wir wissen, Hauptmodul der fünften Stufe. Nun zerfallen Modula 5 die  $(\frac{1}{5}R)$  Substitutionen in 60 Klassen. Zwischen  $F$  und  $S$  besteht daher eine Gleichung 60ten Grades  $F = R_{60}(S)$ , die sog. Skosiedergleichung, die wir schon oben angaben, ihre Wurzeln drücken sich linear durch eine aus. Wir schreiben die 60 Wurzeln in dem folgenden Schema zusammen, in welchem  $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$  ist (Vergl. Skosie, der pag. 43):

$$\varepsilon^{10} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{\mu} \\ \varepsilon^{\mu} \frac{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^{\nu} + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^{\nu} + (\varepsilon - \varepsilon^4)} \end{array} \right\}, \quad - \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{\mu} \\ \varepsilon^{\mu} \frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^{\nu} + (\varepsilon - \varepsilon^4)}{(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^{\nu} + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)} \end{array} \right\}.$$

Geben wir hierin  $\mu$  und  $\nu$  die Werte 1, 2, 3, 4, 5, so stellt die erste Reihe  $2 \times 5$ , die zweite  $2 \times 25$  Werte dar. Im Ganzen haben wir hier die 60 Wurzeln der Skosiedergleichung vor uns. Wir haben hier vor allen Dingen

zu constatiren, daß die Coefficienten der angeschriebenen Substitutionen nicht im natürlichen, sondern in dem durch die 5<sup>te</sup> Einheitswurzel erweiterten Rationalitätsbereiche liegen. Daher können wir die Ikosaedergleichung nur dann als Galvois'sche Gleichung bezeichnen, wenn wir diese Einheitswurzel adjungiren.

Das Hineinspielen der Fahlen- & irrationalität  $\epsilon$  ist für uns besonders interessant. Wir werden uns später darüber klar werden müssen, welche Folgen dieser Umstand für die Theorie der singulären elliptischen Gebilde hat, nämlich für denjenigen von uns zu entwickelnden Theil dieser Theorie, der sich mit der Ikosaederirrationalität  $\zeta$  (10) beschäftigt.

22. V. 96. Um Anschluss an die Formmentheorie zu gewinnen, werden wir die Ikosaedergleichung homogen machen, indem wir setzen  $s = s_1 / s_2$ ; sie lautet dann:

$$J: J^{-1} \cdot 1 = H(\xi_1, \xi_2) = -J(\xi_1, \xi_2) = 1728 f(\xi_1, \xi_2)$$

Die Formen  $H$ ,  $J$  und  $f$ , welche bez.  
von der 20<sup>ten</sup>, 30<sup>ten</sup> und 12<sup>ten</sup> Di-  
mension sind, haben ein einfaches  
Bildungsgesetz. Nennen wir  $f$  die  
Grundform, so wird nämlich  $H$   
die Hesse'sche Form von  $f$  und  $J$   
die Functional-determinante von  
 $f$  und  $H$ . Man erkennt hier den  
Nutzen der homogenen Variablen.  
Übrigens haben wir

$$f = \xi_1^5 \xi_2^5 (\xi_1^{10} + 11\xi_1^5 \xi_2^5 - \xi_2^{10})$$

Ebenso wie die Variable  $\xi$  werden  
wir auch die Substitutionen von  $\xi$   
homogen spalten. Wir richteten es  
so ein, daß die entstehende binä-  
re Substitution die Determinan-  
te 1 erhält und sprechen dann  
von einer unimodularen binä-  
ren Substitution. Z. B. errei-  
chen wir dieses bei der Substi-  
tution



$$\mathfrak{S}' = \varepsilon \mathfrak{S} \quad 79.$$

dadurch, daß wir setzen

$$\mathfrak{S}'_1 = \pm \varepsilon^3 \mathfrak{S}_1$$

$$\mathfrak{S}'_2 = \pm \varepsilon^2 \mathfrak{S}_2.$$

Bei dieser Spaltung bleibt notwendig  
 diger Weise ein Vorzeichen unbestimmt,  
 so daß sich die Zahl der Substitus-  
 tionen von 60 auf 120 vergrößert.  
Ebenso wie die nicht-homogene Tho-  
saedergleichung bei den pg. 76 an-  
gegebenen 60 nicht-homogenen Sub-  
stitutionen von  $\mathfrak{S}$ , bleibt die ho-  
mogen-gemachte Thosaederglei-  
chung und sogar die einzelne  
Form  $f$ ,  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{T}$  bei den 120  
homogenen unimodularen Sub-  
stitutionen von  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$  ungerän-  
dert.

Wir kommen nun zu der Trans-  
formationstheorie des Moduls  $\mathfrak{S}$  (a).  
 Dieselbe ist ausführlich von Frie-  
drich in seiner Dissertation, Leip-  
 zig 1886 behandelt. Vergl. anderer-  
 seits Modulf. II pg 150. Setzen  
 wir den Transformationsgrad

gehen. Dabei erleidet  $\xi(w)$  die sämtlichen 60 Ikosaedersubstitutionen, sofern wir nur auf  $w$  aus jeder der modulo 5 unterschiedenen 60 Classen von Substitutionen mindestens eine ausüben. Wir thun dieses, indem wir die folgenden Substitutionen betrachten ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ganze Zahlen von der Determinante 1):

$$w' = \frac{\alpha w + \beta n}{\gamma w + \delta}$$

Dieselben enthalten in der That, da  $n$  zu 5 relativ prim. ist, Substitutionen aus allen 60 Classen unter sich. Hithin haben wir

$$\left\{ \left( \frac{\alpha w + \beta n}{\gamma w + \delta} \right) = \mathcal{I}(\xi), \right.$$

wo  $\mathcal{I}(\xi)$  eine Ikosaedersubstitution bedeutet u. zw. jede beliebige, wenn wir  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  geeignet verändern.

In gleicher Zeit erleidet aber auch  $\xi'(w)$  eine Ikosaedersubstitution. Wir haben nämlich:

$$\xi \left( \frac{1 + \omega \beta n}{\gamma \omega + \delta} \right) = \xi \left( \frac{\frac{85}{n} + \beta}{\gamma n + \delta} \right) = \xi'(\xi'),$$

unter  $\xi'$  wieder eine geeignete Ikosaeder-  
dersubstitution verstanden.

Wenn also  $\xi$  übergeht in  $\xi(\xi)$ ,  
wobei die Substitution  $\xi$  dem Schema  
entspricht:  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta n \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ,

so verwandelt sich  $\xi'$  in  $\xi'(\xi')$ ,  
wo nun  $\xi'$  durch das folgende Schema  
bestimmt wird:  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma n & \delta \end{pmatrix}$ .

Lassen wir  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  alle möglichen  
Werthe durchlaufen, so erleidet  
 $\xi$  alle möglichen Ikosaedersubsti-  
tutionen und  $\xi'$  gewisse jenen in  
gesetzmässiger Weise zugeordnete si-  
multane Ikosaedersubstitutionen.  
Dabei genügt es schon, für  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$   
die sämtlichen modulo 5 genom-  
menen Zahlen zu setzen, die  
 $\alpha \delta - \beta \gamma n = 1$  ergeben, weil  $\xi$  nach  
dem Modul 5 congruente Substi-  
tutionen es ipso die gleichen Wer-  
the von  $\xi$  und  $\xi'$  ergeben.

Die weit aufgeflossene Eigenschaft  
der Kegeln unserer Gleichung wollen  
wir als eine Eigenschaft der Gleichung  
selbst formulieren. Sie können dann  
sagen: Unsere Gleichung  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$   
bleibt bei gewissen simultanen  $n$ -  
variablen Substitutionen von Variablen  
invariant. Es ist zu erwarten  
sich wie 4 Fälle unterscheiden, je  
nachdem  $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$  ist.

Die Zusammenfassung in simultanen  
variablen Substitutionen von Variablen  
einfach im Falle  $n \equiv 1$ , was 5; All-  
dem eine nämlich aus auf der  
vorigen Seite angegebenen Thema-  
ta nach dem Kronecker überhaupt  
nicht vorzeichen. Hierin bleibt  
in diesem Falle die Gleichung  
 $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  invariant wenn  
wir  $x_i$  durch  $x_i$  schreiben übrigen  
entsprechenden Substitutionen  
unterschieden, was wir sagen  
können wenn  $n \equiv 1$  was 5  
also 5 Substitutionen

Sie sind natürlich 5 zu erwarten.

le theilen wir Folgendes ohne Beweis mit: man erhält aus der Substitution von  $\xi'$  die zugehörige von  $\xi$ , wenn man die in jener vorkommende Grösse  $\epsilon$  durch  $\epsilon''$  ersetzt. Bei der so hergestellten simultanen Substitution von  $\xi, \xi'$  bleibt dann die Gleichung  $f_1(\xi, \xi') = 0$  wiederum ungeändert.

Im Folgenden beschränken wir uns der Kürze halber auf den Fall  $n \equiv 1 \pmod{5}$ . Um aus der geschil-  
derten algebraischen Eigenthümlichkeit ein Verfahren zur Herstellung der Gleichung abzuleiten, nehmen wir wieder Bezug auf die Formentheorie. Wir schreiben unsere Gleichung homogen-machend

$$f_1(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2) = 0$$

und üben auf die Variablen co-  
gradienten lineare unimodulare  
Tetraeder substitutionen aus. Dann  
bleibt nicht nur die Gleichung

sondern auch die linke Seite der Gleichung, d. h. die Form  $f(\xi_1, \xi_2; \xi_1', \xi_2')$  ungeändert. Im Uebrigen bemerken wir ohne es hier auszuführen daß  $f$  auch bei Vertauschung der  $\xi$  und  $\xi'$  ungeändert bleiben muß.

Wir suchen nun zunächst die einfachsten Formen dieser Art auf und bilden das vollständige System solcher Formen, aus denen sich alle übrigen Formen rational und ganz darstellen lassen. Wir können sofort vier doppelt-binäre Formen in  $\xi_1, \xi_2; \xi_1', \xi_2'$  angeben, welche in diesen beiden Variabelreihen symmetrisch sind, bei Ausübung unserer simultanen Moosabder-substitutionen ungeändert bleiben. Es sind dieses:

$$A_1 = \xi_1 \xi_2' - \xi_2 \xi_1'$$

$$A_6 = 6^{\text{ten}} \text{ Polarc von } f(\xi_1, \xi_2),$$

$$A_{10} = 10^{\text{ten}} \text{ " " } H(\xi_1, \xi_2),$$

$$A_{15} = 15^{\text{ten}} \text{ " " } T(\xi_1, \xi_2).$$

Dass die Form  $H_1$ , oder vielmehr die geraden Potenzen von  $H_1$ , (und andere kommen weiterhin nicht vor) die genannten Eigenschaften besitzen, ist von vornherein klar. Was  $H_6$ ,  $H_{10}$ ,  $H_{15}$  betrifft, so wird bei der Polarenbildung der Grad von  $f$ ,  $H_6$ ,  $T$  in  $\xi$ , welcher bez. gleich, 12, 20, 30 ist, auf 6, 10, 15 Einheiten verringert, wofür der Grad in  $\xi'$  auf 6, 10, 15 ansteigt. Dass diese Formen bei den simultanen Kosaedersubstitutionen invariant bleiben, folgt aus der Invarianten-Natur des Polarenprozesses und daraus, dass die Formen  $f$ ,  $H_6$ ,  $T$  sich bei Kosaedersubstitutionen von  $\xi_1, \xi_2$  nicht ändern.

Es zeigt sich nun weiter, dass die angeschriebenen vier Formen das volle Formensystem für die Invarianten der Kosaedersubstitutionen bilden. Daraufhin können wir unsere gesuchte Form  $f$ , als ganze Function der  $H_1, H_6, H_{10}$ .

$\mathcal{H}_{15}$  mit unbestimmten Coefficienten ansetzen.

Die Möglichkeit dieses Verfahrens ist durchaus an die homogene Formulierung des Problems gebunden. Wegen der allgemeinen Durchführung vgl. die genannte Dissertation von Friedrich oder auch Modulf. II pag. 137-141, wo auch die Fälle  $n = 2, 3, 4 \pmod{5}$  berücksichtigt sind.

Hier wollen wir uns auf ein Zahlenbeispiel beschränken, indem wir  $n = 11$  nehmen. Nach der Rechnung von Friedrich, die sich auf die Reihenentwickelungen von  $\zeta$  und  $\zeta'$  stützt, lautet die Transformationsgleichung, welche vom Grade  $\mathcal{H}(n) = 12$  ist, folgendermassen:

$$11 \cdot 17 \cdot \mathcal{H}_2^2 - 18 \cdot 49 \cdot \mathcal{H}_4^2 - 5 \cdot 11 \cdot 335 \cdot \mathcal{H}_6^2 - 17 \cdot 7504 \cdot \mathcal{H}_8^2 = \alpha$$

Wir bemerken noch, dass an die Ausrechnung der entsprechenden Transformationsgleichung für  $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$  gar nicht zu denken ist,



da schon die Transformationsgleichung 3<sup>ter</sup> Ordnung, wie wir sahen, ausserordentlich complicirt war. Die relativ einfache Gestalt der Transformationsgleichungen für  $\xi, \xi'$  liegt in der Einführung der Aggregate  $A_1, A_2, A_{10}, A_{15}$  begründet, die allerdings ihrerseits ziemlich complicirte Functionen von  $\xi, \xi'$  sind.

Mit der Aufstellung der einen Gleichung  $f(\xi, \xi') = 0$  ist indessen die Theorie der Transformationen 5<sup>ter</sup> Stufe nicht abgeschlossen. Wir können nämlich statt des willkürlich herausgegriffenen Werthes  $\xi(\omega)$  ebenso gut ausgehen von einem der 59 anderen Werthe  $\xi\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right)$ , wo die Zahlen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  modulo 5 zu unterscheiden sind. Es bedeutet dieses nichts Anderes, als dass wir den Werth von  $\xi$  einer der 60 Ikosaedersubstitutionen unterwerfen. In jedem dieser Werthe können wir dann die zugehörige Gleichung vom Grade  $\nu(n)$  auf-

stellen, welche ihn mit dem transformirten Werthe  $\xi' = \xi \left( \frac{\omega}{n} \right)$  verbindet. Diese 60 Gleichungen müssen natürlich übereinstimmen mit denjenigen, die man aus  $f(\xi', \xi) = 0$  ableitet, indem man auf  $\xi$  allein die 60 Kreuzersubstitutionen ausübt.

In entsprechender Weise können wir auch mit  $\xi'$  verfahren, indem wir  $\xi'(\omega)$  durch  $\xi' \left( \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \right)$  ersetzen. Es scheint hiernach, daß wir aus jeder der vorgenannten 60 Gleichungen abermals 60 neue Gleichungen erhalten, im Ganzen also 3600. Dem ist aber nicht so; denn jede von diesen Gleichungen geht durch gewisse 60 simultane Kreuzersubstitutionen für  $S$  und  $S'$  in sich über, wie wir es gerade für  $f$ , sahen und von da aus für die übrigen erschliessen.

Es bleiben also nur 60 un-

verschiedene Gleichungen übrig.  
Diese Gleichungen seien:

$$f_1(\xi; \xi) = 0$$

$$f_2(\xi; \xi) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_{60}(\xi; \xi) = 0$$

Hier entsteht die interessante Aufgabe, diese 60 Gleichungen in ihren gegenseitigen Beziehungen neben einander zu betrachten.

Hier kommt vor allem der Begriff gleichberechtigter Gleichungen zur Geltung. Wir werden nämlich zwei Gleichungen dann gleichberechtigt nennen, wenn wir sie dadurch in einander überführen können, dass wir auf  $\xi'$  und  $\xi$  gleichläufige Kossadersubstitutionen oder, wie man auch sagt, cogrediente Kossadersubstitutionen, ausüben. Doch können wir Näheres hierzu, aber erst später mittheilen.

---

Die somit aufgefundenene Eigenschaft der Wurzeln unserer Gleichung wollen wir als eine Eigenschaft der Gleichung selbst formuliren. Wir können dann sagen: Unsere Gleichung  $f_1(\xi', \xi) = 0$  bleibt bei gewissen simultanen Krossaadersubstitutionen der Variablen  $\xi', \xi$  ungeändert. Des Genauern müssen wir 4 Fälle unterscheiden, je nachdem  $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$  ist.

Die Zusammenordnung der simultanen Substitutionen wird besonders einfach im Falle  $n \equiv 1 \pmod{5}$ . Als dann sind nämlich die auf der vorigen Seite angegebenen Schema'sa nach dem Modul 5 überhaupt nicht verschieden. Hithin bleibt in diesem Falle die Gleichung  $f_1(\xi', \xi) = 0$  ungeändert, wenn wir  $\xi$  und  $\xi'$  denselben, übrigens beliebigen Krossaadersubstitutionen unterwerfen, oder, wie wir sagen können, wenn wir  $\xi$  und  $\xi'$  cogredient substituiren.

Heinrichlich der anderen Fälle

le theilen wir Folgendes ohne Beweis mit: man erhält aus der Substitution von  $\xi'$  die zugehörige von  $\xi$ , wenn man die in jener vorkommende Grösse  $\varepsilon$  durch  $\varepsilon''$  ersetzt. Bei der so hergestellten simultanen Substitution von  $\xi, \xi'$  bleibt dann die Gleichung  $f_1(\xi, \xi') = 0$  wiederum ungeändert.

Im Folgenden beschränken wir uns der Kürze halber auf den Fall  $n \equiv 1 \pmod{5}$ . Um aus der geschichtlichen algebraischen Eigentümlichkeit ein Verfahren zur Herstellung der Gleichung abzuleiten, nehmen wir wieder Bezug auf die Formentheorie. Wir schreiben unsere Gleichung homogen-machend

$$f_1(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2) = 0$$

und üben auf die Variablen congruente lineare unimodulare Tetrader substitutionen aus. Dann bleibt nicht nur die Gleichung

sondern auch die linke Seite der Gleichung, d. h. die Form  $f(\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2')$  ungeändert. Im Uebrigen bemerken wir ohne es hier auszuführen daß  $f$  auch bei Vertauschung der  $\xi$  und  $\xi'$  ungeändert bleiben muß.

Wir suchen nun zunächst die einfachsten Formen dieser Art auf und bilden das vollständige System solcher Formen, aus denen sich alle übrigen Formen rational und ganz darstellen lassen. Wir können sofort vier doppelt-binäre Formen in  $\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2'$  angeben, welche in diesen beiden Variabelreihen symmetrisch sind, bei Ausübung unserer simultanen Transformationen ungeändert bleiben. Es sind dieses:

$$A_1 = \xi_1 \xi_2' - \xi_2 \xi_1'$$

$$A_6 = 6^{\text{ten}} \text{ Polarc von } f(\xi_1, \xi_2),$$

$$A_{10} = 10^{\text{ten}} \text{ " " } H(\xi_1, \xi_2),$$

$$A_{15} = 15^{\text{ten}} \text{ " " } T(\xi_1, \xi_2).$$

Dass die Form  $A_1$ , oder vielmehr die geraden Potenzen von  $\mathcal{H}_1$ , (und andere kommen weiterhin nicht vor) die genannten Eigenschaften besitzen, ist von vornherein klar. Was  $A_6, A_{10}, A_{15}$  betrifft, so wird bei der Polarenbildung der Grad von  $f, H, T$  in  $\xi$ , welcher bez. gleich, 12, 20, 30 ist, auf 6, 10, 15 Einheiten verringert, wofür der Grad in  $\xi'$  auf 6, 10, 15 ansteigt. Dass diese Formen bei den simultanen Kosaedersubstitutionen invariant bleiben, folgt aus der Invarianten-Natur des Polarenprozesses und daraus, dass die Formen  $f, H, T$  sich bei Kosaedersubstitutionen von  $\xi, \xi'$  nicht ändern.

Es zeigt sich nun weiter, dass die angeschriebenen vier Formen das volle Formensystem für die Invarianten der Kosaedersubstitutionen bilden. Daraufhin können wir unsere gesuchte Form  $f$ , als ganze Function der  $A_1, A_6, A_{10}$ ,

stellen, welche ihn mit dem transformirten Werthe  $\xi' = \xi \left( \frac{\omega}{n} \right)$  verbindet. Diese 60 Gleichungen müssen natürlich übereinstimmen mit denjenigen, die man aus  $f(\xi', \xi) = 0$  ableitet, indem man auf  $\xi$  allein die 60 Kreuzersubstitutionen ausübt.

In entsprechender Weise können wir auch mit  $\xi'$  verfahren, indem wir  $\xi'(\omega)$  durch  $\xi' \left( \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \right)$  ersetzen. Es scheint hiernach, dass wir aus jeder der vorgenannten 60 Gleichungen abermals 60 neue Gleichungen erhalten, im Ganzen also 3600. Dem ist aber nicht so; denn jede von diesen Gleichungen geht durch gewisse 60 simultane Kreuzersubstitutionen für  $\xi$  und  $\xi'$  in sich über, wie wir es gerade für  $f$ , sahen und von da aus für die übrigen erschliessen.

Es bleiben also nur 60 un-



verschiedene Gleichungen übrig.  
Diese Gleichungen seien:

$$f_1(\xi; \xi) = 0$$

$$f_2(\xi; \xi) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_{60}(\xi; \xi) = 0$$

Hier entsteht die interessante Aufgabe, diese 60 Gleichungen in ihren gegenseitigen Beziehungen neben einander zu betrachten.

Hier kommt vor allem der Begriff gleichberechtigter Gleichungen zur Geltung. Wir werden nämlich zwei Gleichungen dann gleichberechtigt nennen, wenn wir sie dadurch in einander überführen können, dass wir auf  $\xi'$  und  $\xi$  gleichläufige Ikosaedersubstitutionen oder, wie man auch sagt, cogrediente Ikosaedersubstitutionen, ausüben. Doch können wir Näheres hierzu erst später mittheilen.

---

Und zwar definieren wir

$x^2 - \frac{d}{4} y^2$  als Hauptform erster Art

$x^2 + xy + \frac{1-d}{4} y^2$  als Hauptform zweiter Art.

Allemaal konnten wir eine quadratische Form in zwei Linearfactoren spalten, welche wir als Gitterzahlen oder auch als Minimalcoordinaten bezeichneten. Diese Grössen waren nur bis auf einen willkürlichen Factor bestimmt, den sog. Azimuthalfactor. Wir setzen bereits fest, dass bei negativer Discriminante der Azimuthalfactor den absoluten Betrag 1 haben (vergl. Teil I pag 67) und dass er bei positiver Discriminante reell sein sollte (vergl. Teil I pag 78). Das Product zweier zusammengehöriger Azimuthalfactoren muss dabei stets gleich 1 sein.

Speciell liegt nun bei den Hauptformen eine bestimmte Art der Spaltung besonders nahe, welche wir

hiermit verabreden wollen. Wir werden eine Hauptform erster Art in die Factoren

$$\xi = x + \frac{\sqrt{d}}{2} y, \quad \eta = x - \frac{\sqrt{d}}{2} y$$

und eine Hauptform zweiter Art in

$$\xi = x + \frac{1+\sqrt{d}}{2} y, \quad \eta = x + \frac{1-\sqrt{d}}{2} y$$

auflösen, wodurch bei den Hauptformen die Azimuthalfactoren festgelegt sind.

Wir wollen ferner für die Hauptformen eine feste Art der geometrischen Darstellung verabreden, indem wir ihnen ein ganz bestimmtes Gitter coordiniren. Aus dem ersten Theile dieser Vorlesung wissen wir, daß wir jeder Form jedes beliebige Gitter zuordnen können, wofern wir nur die Maassbestimmung in der Ebene geeignet definiren. Indessen ist es bequem, bei den folgenden Betrachtungen speciell in folgender Art zu verfahren:

Es handle sich zuerst um

Hauptformen erster Art. Je nach dem  $d$  positiv oder negativ ist, haben wir noch zwei verschiedene Fälle von Hauptformen erster Art zu unterscheiden. Wir gehen von einem rechtwinkligen Koordinatensystem  $u, v$  aus, wobei jedem Punkt der Ebene in gewöhnlicher Weise zwei Coordinaten  $u, v$  entsprechen. Wir setzen dann

bei positivem  $d$

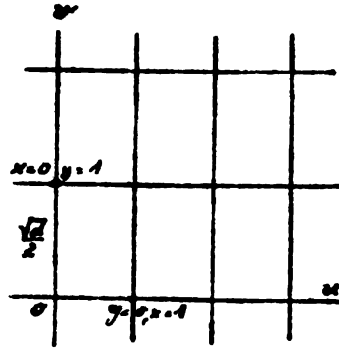
$$x = u, \quad y = \frac{2v}{\sqrt{d}}$$

bei negativem  $d$

$$x = u, \quad y = \frac{2iv}{\sqrt{d}}$$

Die Gitterecke  $x=1, y=0$  wird infolgedessen mit dem Punkte  $u=1, v=0$  der Ebene zusammenfallen. Andererseits fällt die Gitterecke  $x=0, y=1$  in den Punkt  $u=0, v=\frac{\sqrt{d}}{2}$  bez. (bei negativem  $d$ ) in den Punkt  $u=0, v=\frac{i\sqrt{d}}{2}$ . Durch die genannten beiden Eckpunkte und den Anfangspunkt ist ein erstes Parallelogramm unseres Gitters und

99.  
weiterhin das ganze Gitter bestimmt.  
Das Gitter wird, wie man sieht (vergl.  
die folgende Figur),



ein rechteckiges Gitter. Dierzuge-  
hörigen Gitterzahlen sind nach  
§ 97, je nachdem  $d > 0$  oder  
 $d < 0$  ist:

$$\begin{array}{l} \xi = u + v, \\ \eta = u - v. \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} \xi = u + iv, \\ \eta = u - iv. \end{array}$$

Wir betrachten zweitens die Haupt-  
formen zweiter Art. Nachdem wir,  
wie vorher, ein gewöhnliches recht-  
winkliges Koordinatensystem  $u, v$   
definiert haben, setzen wir in

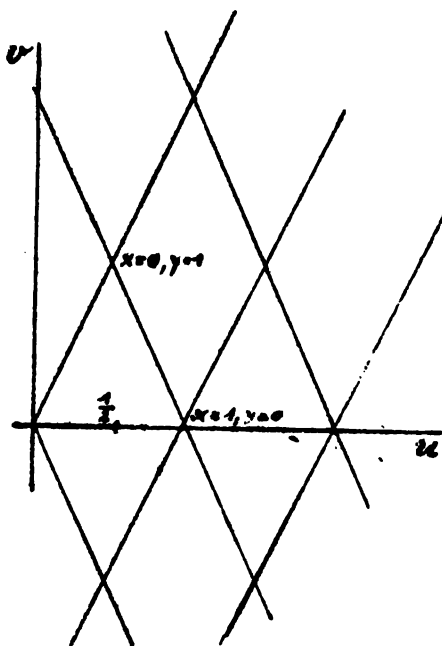
Falle  $d > 0$  bez.  $d < 0$ ;

$$u = x + \frac{y}{2} \quad u = x + \frac{y}{2}$$

$$v = \frac{\sqrt{d} \cdot y}{2} \quad \text{bez.} \quad v = \frac{\sqrt{d} \cdot y}{2i}$$

Hierauf bestimmen wir die den Ecken des ersten Parallelogramms entsprechenden Punkte der Ebene. Offenbar hat der Punkt  $x = 1, y = 0$  die Coordinaten  $u = 1, v = 0$ . Dieser Eckpunkt hat also dieselbe Lage, wie vorher, es ist der Einheitspunkt der  $u$  Axe.

Ferner haben wir im Punkte  $x = 0, y = 1$  die Coordinaten  $u = \frac{1}{2}, v = \frac{\sqrt{d}}{2}$  bez.  $v = \frac{\sqrt{d}}{2i}$ . Mithin liegt der Eckpunkt  $x = 0, y = 1$  jetzt nicht wie vorher auf der  $v$ -Axe; vielmehr hat er von dieser den Abstand  $\frac{1}{2}$ . Das aus dem Punkt  $x = 0, y = 1$  und  $x = 1, y = 0$  sowie aus dem Anfangspunkte gebildete Dreieck ist ein gleichschenkeliges; durch geeignete Verdoppelung desselben (vergl. die Figur auf Seite 101) erhalten wir als erstes Parallelo-



gramm unseres  
Gitters einen  
Rhombus. Den  
Hauptformen  
zweiter Art  
entspricht also  
so in Folge  
unserer Voraus-  
setzung ein  
rhombisches  
Gitter. Die zu-  
gehörigen Gitter-  
zahlen drücken  
sich durch  
die Coordina-

ten  $u$  und  $v$  gerade so aus, wie bei  
den Hauptformen erster Art; es wird  
nämlich

$$\begin{aligned} \xi &= u + v & \zeta &= u + iv \\ \eta &= u - v & \text{bez.} & \eta = u - iv. \end{aligned}$$

Wir können, zusammenfassend für  
beide Formenarten, die geometrische  
Bedeutung der Gitterzahlen in

der  $u, v$ -Ebene dadurch beschreiben, dass wir sagen:

Im Falle eines positiven  $d$  sind die Gitterzahlen die mit  $k$  multiplicirten Abstände, welche die Eckpunkte des Gitters von den die Quadranten der  $u, v$ -Ebene halbirenden Geraden besitzen. Im Falle eines negativen  $d$  aber sind es die gewöhnlichen complexen Zahlen, welche man den Gittereckpunkten in der Gaussischen Ebene beizulegen gewohnt ist.

In der That wird  $f$  beziehungsweise gleich  $u^2 - v^2$  und  $u^2 + v^2$  sein.

Wir werden nun zeigen, dass die hiermit durchgeführte Construction der Hauptgitter in dem allerengsten Zusammenhange mit der Theorie der quadratischen Körper steht, welche sonst in abstracter Weise entwickelt wird und die hier in ihren Grundlagen als bekannt vorausgesetzt werden



soll (vergl. etwa die Darstellung in Dedekind's Zahlentheorie oder auch die Protocoll des Winteraminars).

Ein quadratischer Körper wird definiert durch die Irrationalität  $\sqrt{m}$ , wo  $m$  als quadratfreie Zahl vorausgesetzt wird, indem nämlich ein etwaiger quadratischer Theiler von  $m$  für den Körper irrelevant wäre. Bestimmt man nun die ganzen algebraischen Zahlen des Körpers  $\mathbb{Z}(\sqrt{m})$ , so wird eine Fallunterscheidung nöthig, je nachdem

$$m \equiv 2 \text{ bez. } \equiv 3 \pmod{4}$$

oder

$$m \equiv 1 \pmod{4}$$

ist. Im ersten Falle haben die ganzen Zahlen des Körpers die Gestalt:

$$x + y\sqrt{m};$$

im zweiten Falle sind sie dargestellt durch

$$x + y \frac{1 + \sqrt{m}}{2},$$

wo beidemal unter  $x$  und  $y$  ganze rationale Zahlen verstanden werden. Als Basis des Körpers haben wir hier nach zu bezeichnen:

im ersten Falle die beiden Grössen

$$1, \sqrt{m},$$

im zweiten Falle die beiden folgenden Zahlen

$$1, \frac{1 + \sqrt{m}}{2}$$

Als Discriminante dieses Körpers definiert man bekanntlich das Quadrat der aus der Basis und ihren conjugirten Werthen gebildeten Determinante. Hiernach wird im ersten Falle:

$$d = \begin{vmatrix} 1, \sqrt{m} \\ 1, -\sqrt{m} \end{vmatrix}^2 = 4m$$

im zweiten Falle dagegen:

$$d = \begin{vmatrix} 1, \frac{1 + \sqrt{m}}{2} \\ 1, \frac{1 - \sqrt{m}}{2} \end{vmatrix}^2 = m.$$

Den ganzen algebraischen Zahlen des Körpers können wir hiernach in einen oder anderen Falle bez.

die Form geben:

$$x + y \frac{\sqrt{d}}{2} \text{ bez. } x + y \frac{1 + \sqrt{d}}{2}.$$

Das sind aber, wie wir sehen, genau dieselben Verbindungen, welche wir oben (S. 96) als Gitterzahlen  $\xi$  bezeichneten und aus den zur Discriminante  $d$  gehörigen Hauptformen 1<sup>ter</sup> und 2<sup>ter</sup> Art ableiteten. Das heißt also: die zu der Hauptform einer Hammdiscriminante  $d$  vermöge unserer Verabredungen gehörigen Gitterzahlen  $\xi$  sind mit den ganzen algebraischen Zahlen des Körpers  $K(d)$  genau identisch.

Unsere Gitterbetrachtung weist uns aber darauf hin, neben den Gitterzahlen  $\xi$  gleichzeitig die Gitterzahlen  $\eta$  im Auge zu haben. Für die Körpertheorie ergibt sich daraus, daß wir neben dem Körper  $\sqrt{d}$  (welcher von dem Körper  $K(m)$  ersichtlich nicht verschieden ist) gleichzeitig den conjugirten Kör-

per -  $\sqrt{d}$  stellen sollen.

Diese Modification der Betrachtung ist allerdings im Falle des quadratischen Körpers keine eigentliche Erweiterung; da nämlich  $-\sqrt{d}$  ersichtlich rational durch  $+\sqrt{d}$  ausgedrückt werden kann, so ist  $\mathcal{D}(-\sqrt{d})$  mit  $\mathcal{D}(+\sqrt{d})$  identisch. Dieselbe sehr selbstverständliche Thatsache meint man, wenn man sagt: Der quadratische Körper ist ein Galois'scher Körper: oder: die quadratische Gleichung ist eine Galois'sche Gleichung. Trotzdem ist die durch unser Gitter indicirte consequente Nebeneinanderstellung der Zahlen  $x + y \frac{\sqrt{d}}{2}$  und  $x - y \frac{\sqrt{d}}{2}$  etc. sehr nützlich. Es gilt das in verstärktem Maße, wenn wir zu höheren Körpern schreiten. Wie sich unser geometrisches Bild auf diese höheren Fälle erweitert, ist unmittelbar verständlich. Wir haben dann nicht ein von Geraden gebildetes Gitter in der Ebene,

sondern ein Gitter im  $\mathbb{R}^n$  zu betrachten, welches von einem Systeme paralleler äquidistanter  $\mathbb{R}^{n-1}$  gebildet wird. Die discontinuirliche Anordnung der Gitter-Eckpunkte im  $\mathbb{R}^n$  ist etwas durchaus übersichtliches. Dementsprechend wird sich bei gleichzeitiger Betrachtung der zu jedem Gitterpunkte gehörigen  $n$  Coordinaten (Gitterzahlen) eine übersichtliche Theorie der Gitterzahlen ergeben. Beschränken wir uns aber nur auf einen der  $n$  conjugirten Körper, d. h. auf nur eine der  $n$  Coordinaten der Gitterpunkte, so bedeutet dieses geometrisch, daß wir das  $n$ -dimensionale Gitter auf eine Mannigfaltigkeit von nur einer Dimension projectiren. Hierbei entsteht natürlich ein verworrenes Bild der räumlichen Anordnung, dessen Punkte auf der gewählten Coordinatenaxe im Allgemeinen überall dicht liegen werden.

Dementsprechend wird die Theorie der Gitterzahlen von diesem beschränkteren Standpunkte aus unübersichtlich werden. Ubrigens kommt ja ganz dieselbe Bemerkung in der Theorie der Abel'schen Functionen zur Geltung, welche gerade durch den von Jacobi vollzogenen Übergang zu höheren Dimensionen ihre heutige einfache Gestalt gewonnen hat.

11. II. 96. Nachdem wir im vorhergehenden für die Hauptformen eine bestimmte Zerlegung in Factoren und daran anschließend eine bestimmte geometrische Interpretation verabredet haben, werden wir jetzt das Entsprechende für die Nebenformen (Nebenklassen) durchführen. Ebenso, wie die Theorie der Hauptgitterzahlen übereinstimmt mit der Theorie der gewöhnlichen ganzen algebraischen Zahlen des Körpers  $\mathbb{K}$ , so wer-

den wir erkennen, dass die Litterzahlen der Nebenklassen auf die Idealtheorie des genannten quadratischen Körpers führen.

Es handelt sich um eine beliebige quadratische Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

der Hammdiscriminante  $d = b^2 - 4ac$ .

Wir zerlegen dieselbe nach dem mehrfach genannten Schema

$$f = \xi \eta,$$

$$\xi = \rho \left( \sqrt{a} x + \frac{b + \sqrt{d}}{2} y \right),$$

$$\eta = \frac{1}{\rho} \left( \sqrt{a} x + \frac{b - \sqrt{d}}{2} y \right),$$

in Linearfactoren. Die geometrische Interpretation der "Litterzahlen"  $\xi$  und  $\eta$  geschieht in derselben Weise, wie pag. 99 bis 101 im Falle der Hauptformen. Wir setzen nämlich

$$\xi = u + (i) v,$$

$$\eta = u - (i) v,$$

welche abkürzende Schreibweise uns im Falle eines positiven oder

negativen  $d$  bez. die beiden Gleichungen  $= u+v$  oder  $= u+iv$  etc. vertreten soll, und deuten  $u$  und  $v$  als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene. Die Gitterzahlen bez. deuten dann, wie früher, im Falle eines positiven  $d$  die mit  $\sqrt{d}$  multiplicirten Abstände der Gitterpunkte von den die Quadranten der  $u, v$ -Ebene halbirenden Geraden; im Falle eines negativen  $d$  dagegen bedeuten sie einfach die den Gitterpunkten in der Gauß'schen Ebene zugeordneten complexen Zahlen.

In unserer Zerlegung sind die „Azimuthalfactoren“  $\vartheta$  und  $\frac{1}{\vartheta}$  vorläufig noch unbestimmt. Ein erster Schritt zu ihrer Festlegung soll der folgende sein:

Wir betrachten neben der Formclassenklasse, welche die Form  $(a, bc)$  enthält, diejenige, in welcher die Form  $(a, -b, c)$  vorkommt. Zwei solche Classen nennen wir conjugirte Classen. Eine Klasse, wel.



che mit ihrer conjugirten identisch ist, bezeichnen wir, wie schon Theil I pag. 162 hervorgehoben, als Uncoups- klasse.

Wir treffen nun die Verabredung, dass conjugirte Gitter mit conjugir- ten Factoren  $\varrho$  ausgestattet werden sollen, wobei wir zwei Factoren  $\varrho$  und  $\varrho'$  conjugirt nennen, wenn  $\varrho \varrho' = 1$  ist. Hiernach lauten die zu zwei conjugirten Gittern gehö- rigen Gitterzahlen:

$$\xi = \varrho \left( \sqrt{a} x + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} y \right), \quad \eta = \frac{1}{\varrho} \left( \sqrt{a} x + \frac{b - \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} y \right)$$

$$\xi' = \frac{1}{\varrho'} \left( \sqrt{a} x + \frac{-b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} y \right), \quad \eta' = \varrho' \left( \sqrt{a} x + \frac{-b - \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} y \right).$$

Lassen wir hierin  $x$  und  $y$  alle po-  
sitiven und negativen ganzen  
Zahlen durchlaufen, so erhalten  
wir die Minimalcoordinaten der  
Eckpunkte desjenigen Punktgit-  
ters, welchem die Form  $(a, b, c)$   
angehört; lassen wir ebenso

$x'$  und  $y'$  alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir die Minimalcoordinaten der Eckpunkte des conjugirten Gitters, dem die Form  $(a, -b, c)$  angehört. Unter den beiden unendlichen Serien von Punkten  $x, y$  und  $x', y'$  wollen wir je zwei solche Punkte mit einander vergleichen, für welche  $x' = x, y' = -y$  ist. Ein Blick auf die vorstehenden Formeln zeigt dann, dass für solche Punkte

$$\xi' = \eta \quad \text{und} \quad \eta' = \xi$$

wird. Unsere Vereinbarung über die Arithmeticalfactoren conjugirter Formen bringt es also mit sich, dass, wenn die Form  $f$  die Zerlegung

$$f = \xi \cdot \eta$$

liefert, die conjugirte Form  $f'$  die Zerlegung

$$f' = \eta \xi$$

gibt. Diese Thatsache hat eine einfache geometrische Bedeutung. Berücksichtigen wir nämlich den Zusammenhang zwischen den Coordinaten  $\xi, \eta$  und  $u, v$ , so ergeben sich aus den Gleichungen  $\xi' = \eta, \eta' = \xi$  die beiden folgenden Gleichungen:

$$u' \pm (i)v' = u \mp (i)v$$

d. h.

$$u' = u, v' = -v.$$

Der Punkt  $u', v'$  geht also aus dem Punkte  $u, v$  durch Spiegelung an der  $u$ -Axe hervor.

Überhaupt können wir sagen:

In Folge unserer obigen Verabredung liegen zwei conjugirte Gitter in Bezug auf die  $u$ -Axe spiegelbildlich zu einander.

Wir mögen noch hinzufügen, daß sie auch spiegelbildlich in Bezug auf die  $v$ -Axe liegen. Der Grund hiervon ist der, daß jedes Gitter bei einer Drehung von  $180^\circ$  um  $O$  mit sich zur Deckung kommt. In Folge dessen gibt

es in unserem ersten Gitter außer dem Punkte  $u, v$  auch stets einen Punkt  $-u, -v$ . In diesen wird aber der Punkt  $u, -v$  des zweiten Gitters durch eine Spiegelung an der  $v$ -Achse übergeführt.

Die Bestimmung der Azimutthal-factoren ist damit natürlich noch nicht abgeschlossen. Hart unseren bisherigen Verabredungen ist es verträglich, daß wir von zwei conjugierten Gittern das eine noch ganz willkürlich orientiren. Erst nachdem dieses geschehen, ist die Lage des zweiten Gitters festgelegt.

Nur in dem besonderen Falle der Ancep.gitter ist durch das Vorstehende die Orientirung bereits genauer fixirt, da sie die besondere Eigenschaft haben, mit ihren conjugierten Gittern identisch zu sein.

(Theil I pag 163). Nach dem eben Auseinandergesetzten erhält man das richtig orientirte conjugierte Gitter, wenn man das orientirte

ursprüngliche Gitter an der  $u$ -Achse (oder  $v$ -Achse) spiegelt; einrichtig orientirtes Ancepogitter muß daher so liegen, daß es durch Spiegelung an der  $u$ - (und  $v$ -) Achse in sich übergeht.

Wie wir nun früher gesehen haben (vergl. Theil I Sg 232 ff) läßt sich das Fundamentalparallelogramm eines Ancepogitters immer als Rechteck oder Rhombus wählen. Die Orientirung des Ancepogitters ist deshalb so anzuführen, daß eine Seite des Rechtecks oder eine Diagonale des Rhombus in die Richtung der  $u$ - (oder  $v$ -) Achse fällt. Dies kann offenbar jedesmal nur auf höchstens 2 Weisen geschehen, da die Seiten des Rechtecks und die Diagonalen des Rhombus rechtwinklig auf einander stehen. Ein Ancepogitter läßt deshalb nach den vorstehenden Festsetzungen nur noch eine 2-fache Möglichkeit der

Orientierung zu. Wir sprechen dies in folgendem Satze aus:

Unsere Verabredung über die conjugirten Gitter bedeutet für die Ancepsgitter speciell eine noch auf 2 Weisen herzustellende Orientierung derselben.

Wir werfen noch einen Blick auf die Gesamtfigur, soweit sie sich aus unseren bisherigen Betrachtungen ergeben hat. Sie besteht aus einem System von  $h$  Gittern, einem Hauptgitter und  $h-1$  Nebengittern. Das Hauptgitter haben wir bereits in eindeutiger Weise festgelegt, die Ancepsgitter in zweideutiger Weise. Die übrigen Gitter sind einander paarweise zugeordnet und liegen spiegelbildlich in Bezug auf die Coordinatenachsen.

Jedes dieser Gitter liefert uns ein System von Gitterzahlen  $\xi, \eta$ . Die arithmetische Natur der Hauptgitterzahlen haben wir bereits oben besprochen:

es sind die ganzen Zahlen des Körpers  $\mathcal{O}_d$ . Die arithmetische Natur der Nebengitterzahlen hängt offenbar von der Wahl des Factors  $\mathfrak{q}$  ab.

Wir wollen hierüber vorläufig nur soviel sagen, dass wir die selben als Irrationalitäten fixieren werden, welche zu dem Körper  $\mathcal{O}_d$  in einer einfachen Beziehung stehen.

Wir haben schon gelegentlich als Zielpunkt unserer Entwicklungen hingestellt, dass unsere  $h$  Gitter einen Organismus bilden und dass sie durch innere Beziehungen verbunden sind. Dies wird deutlich werden, wenn wir im Folgenden dazu übergehen, Rechenregeln festzusetzen, nach denen wir mit den Gitterzahlen  $\xi, \eta$  unserer  $h$  Gitter operieren wollen. Wir kommen hierdurch zu neuen fruchtbaren Fragestellungen und vertiefen unsere Auffassung der Gittertheorie.

## Von der Composition der Gitter

Es handelt sich zunächst darum festzusetzen, was wir unter der Operation der Addition und Multiplication verstehen wollen. Wir sagen:

Man addirt Gitterpunkte, indem man ihre Minimalcoordinaten addirt.

Man multiplicirt Gitterpunkte, indem man ihre Minimalcoordinaten multiplicirt.

In Zeichen drücken wir dieses folgendermassen aus. Gegeben seien zwei Gitterpunkte  $(\xi, \eta)$  und  $(\xi', \eta')$ . Nach den vorstehenden Regeln haben wir:

$$(\xi, \eta) + (\xi', \eta') = (\xi + \xi', \eta + \eta')$$

$$(\xi, \eta) \cdot (\xi', \eta') = (\xi \xi', \eta \eta')$$

Im Uebrigen setzen wir fest, dass wir nur solche Operationen vornehmen wollen, durch welche wir wieder auf Punkte unserer ursprünglichen



Figur geführt werden. Wir wollen also durch die vorzunehmenden Operationen keine neuen geometrischen Elemente bez. keine neuen Irrationalitäten einführen.

Was nun die Addition anbetrifft, so ergibt sich: Sind zwei Punkte  $(\xi, \eta)$  u.  $(\xi', \eta')$  zu addiren, die demselben unserer  $h$  Gitter angehören, so liegt offenbar auch der Punkt  $(\xi + \xi', \eta + \eta')$  in demselben Gitter, denn er wird durch geometrische Addition der Strecken von  $O$  nach  $(\xi, \eta)$  bez. nach  $(\xi', \eta')$  erhalten. Liegen dagegen die Punkte  $(\xi, \eta)$  u.  $(\xi', \eta')$  in verschiedenen Gittern, so wird ihre Summe im allgemeinen nicht in unserer Figur vorkommen (vorausgesetzt natürlich, dass die Anmuthalfactoren irgendwie fixirt sind) Wir werden daher im Folgenden die Addition auch nur auf Punkte desselben Gitters anwenden.

Ebenso wie von der Addition der Gitterpunkte, werden wir auch von der Addition ganzer Gitter reden,

indem wir festsetzen:

Man addirt zwei Gitter, indem man zu jedem Punkte des einen Gitters jeden des anderen addirt.

Auch die Addition der Gitter wird im allgemeinen nicht statthaft sein, wenn wir an unserer Beschränkung festhalten und überdies als Resultat der Addition wieder eine discrete Punktmenge erhalten wollen. Doch kann man z. B. zwei dem Hauptgitter eingelagerte Gitter addiren, was wir in unseren späteren Entwicklungen auch ausführen werden. Wir verweilen deshalb noch einen Augenblick dabei, um zu untersuchen, was über die Discriminante des durch Addition zweier Gitter  $G_1$  und  $G_2$ , (die wir etwa dem Hauptgitter eingelagert denken) resultirenden Gitters  $G_3$  auszusagen ist. Sind die Inhalte der Fundamentalparallelogramme von  $G_1$  und  $G_2$  resp.  $m \mathcal{V}_d$  und  $n \mathcal{V}_d$ , so können wir den Inhalt des Fundamentalparallelogramms

von  $G_3$  mit  $r$   $\mathcal{V}$ d bezeichnen, unter  $m, n, r$  ganze rationale Zahlen verstanden. Es muß dann, wie wir behaupten  $r$  ein Theiler von  $m$  und  $n$  sein, weil die Gitter  $G_1$  und  $G_2$  in  $G_3$  enthalten sein müssen. Ist nämlich ein Gitter I in einem Gitter II enthalten und haben die Fundamentalpunkte des ersteren in dem letzteren die Coordinaten  $x_0, y_0, x_1, y_1$ , so ist bekanntlich der Inhalt des Fundamentalparallelogramms von I  $|x_0 y_1 - y_0 x_1|$  mal so gross als der von II, also ein ganzzahliges Multipel desselben; Damit ist aber unsere Behauptung gerechtfertigt.

Ergiebiger ist für unsere Zwecke die Operation des Multiplicirens. Kann man darf, wie sich im Folgenden zeigen wird, zwei beliebige Gitterpunkte mit einander multipliciren; die Multiplication führt stets auf Gitterpunkte unserer Figur, vorausgesetzt, daß man die Aximuthalfactoren passend wählt.

Wir haben bereits festgesetzt, was wir unter der Multiplication zweier Gitterpunkte verstehen; wir wollen aber auch hier, ebenso wie bei der Addition, gleich die ganzen Gitter in Betracht ziehen und erklären, was man unter der Multiplication, oder besser gesagt, Composition zweier Gitter versteht.

Zwei Gitter  $G$  und  $G'$  componiren heisst: alle Punkte von  $G$  mit allen Punkten von  $G'$  multipliciren und die so entstehenden Punkte auf alle möglichen Weisen addiren.

Die Operation des Componirens ist also nur theilweise eine Multiplication, theilweise dagegen eine Addition, die neue Bezeichnung ist deshalb durchaus gerechtfertigt.

Ebenso wie man nicht zwei beliebige Gitter addiren kann, ist es auch nicht möglich, sie zu componiren, schon aus dem Grunde, weil die Operation des Componirens das Addiren von Gitterzahlen in sich schliesst. Wir wollen deshalb in

Folgendem nur von der Composition unserer  $h$  Stammgitter reden, die stets ausführbar ist.

Wir führen zunächst den Nachweis, dass sich durch Composition zweier Stammgitter wieder ein Stammgitter derselben Discriminante ergibt.

Seien die zu componirenden Gitter:

$$G = \sqrt{a} \cdot x + \frac{b + \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} y \quad \text{und} \quad G' = \sqrt{a'} \cdot x' + \frac{b' + \sqrt{a'}}{2\sqrt{a'}} y'$$

und die entsprechenden Formen

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{und} \quad f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$$

Um unsere Behauptung zu recht fertigen, präpariren wir uns die Gitter resp. Formen erst in geeigneter Weise, indem wir ihnen im Anschluss an Dirichlet einige Lage geben.

Wir nennen nämlich zwei Formen einig, wenn die Coefficienten  $a$  und  $a'$  theilerfremd sind und die mittleren Coefficienten gleich.

Die letztere Bedingung hat eine einfache geometrische Bedeutung, ist nämlich  $b = b'$ , so muss auch

infolge der Gleichheit der Discriminan-  
ten  $ac = a'c'$  sein. Bezeichnen wir  
nun die Parallelogrammwinkel, die  
zu unsern Formen gehören, mit  
 $\psi$  und  $\psi'$ , so ist

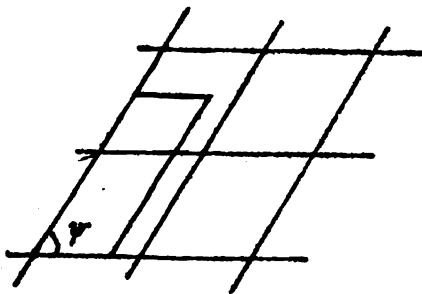
$$\cos \psi + i \sin \psi = \frac{b + \sqrt{D}}{2\sqrt{ac}}$$

§

$$\cos \psi' + i \sin \psi' = \frac{b' + \sqrt{D}}{2\sqrt{a'c'}} \text{ also}$$

da  $\frac{b + \sqrt{D}}{2\sqrt{ac}} = \frac{b' + \sqrt{D}}{2\sqrt{a'c'}}$ , auch  $\cos \psi + i \sin \psi =$   
 $\cos \psi' + i \sin \psi'$  oder  $\psi = \psi'$ . Bei eini-  
ger Lage zweier Formen besitzen also die  
Fundamentalparallelogramme diesel-  
ben Winkel.

Wir zeigen jetzt:  
wenn zwei Stamm-  
formen vorliegen,  
so können wir sie  
stets durch zwei  
äquivalente ein-  
ge Formen ersetzen.



1. Wir können bewirken, dass  $a$  und  
 $a'$  relativ prim werden. (Vergl. Dir-  
Ded. pg 234, 4<sup>te</sup> Auflage)

2. Wir führen an  $f$  bez.  $f'$  die Transformationsformation erster Ordnung aus

$$\begin{aligned} x &= X + \lambda Y & x' &= X' + \mu Y' \\ y &= Y & y' &= Y' \end{aligned}$$

wodurch sich ergibt:

$$\begin{aligned} f &= aX^2 + (2a\lambda + b)XY + (a\lambda^2 + b\lambda + c)Y^2, \\ f' &= a'X'^2 + (2a'\mu + b')X'Y' + (a'\mu^2 + b'\mu + c')Y'^2. \end{aligned}$$

Hier können wir  $\lambda$  und  $\mu$  so bestimmen, dass

$$2a\lambda + b = 2a'\mu + b' \text{ wird.}$$

Denn die Congruenz

$$2a\lambda \equiv b' - b \pmod{2a'}$$

ist immer lösbar, da  $a$  und  $a'$  relativ prim sind und  $b' - b \equiv 0 \pmod{2}$  bei gleichem  $d$ .

Nennen wir nun den gemeinsamen Werth der mittleren Coefficienten der beiden Formen  $B$

$$b = b' = B,$$

so folgt aus der Gleichheit der Dis.

criminanten  $ac = a'c'$ . Da nun  $a$  und  $a'$  als theilerfremd angenommen werden, so muss  $c$  durch  $a'$  und  $c'$  durch  $a$  theilbar sein. Wir setzen:

$$c = a' C \quad c' = a C$$

Die beiden Formen sind dann

$$(a, B, a' C) \text{ und } (a', B', a C)$$

und die entsprechenden Gitter:

$$G = \sqrt{a} x + \frac{B + \sqrt{D}}{2\sqrt{a}} y \quad \text{und} \quad G' = \sqrt{a'} x' + \frac{B' + \sqrt{D'}}{2\sqrt{a'}} y'$$

Nunmehr können wir folgende Identität aufschreiben:

$$\begin{aligned} (1) \quad (\sqrt{a} x + \frac{B + \sqrt{D}}{2\sqrt{a}} y) (\sqrt{a'} x' + \frac{B' + \sqrt{D'}}{2\sqrt{a'}} y') &= \sqrt{aa'} (xx' - \frac{D}{4} yy') + \\ &\quad + \frac{B + \sqrt{D}}{2\sqrt{aa'}} (ay' + a'x + B'yy') \\ &= \sqrt{aa'} x + \frac{B + \sqrt{D}}{2\sqrt{aa'}} y. \end{aligned}$$

Aus dieser folgt: Wenn wir zwei Gitterzahlen aus den Gittern  $G$  und  $G'$  multipliciren, so erhalten wir eine Gitterzahl, die zu dem Stammgitter  $(aa', B', C)$  gehört.



Wir haben damit einen Theil unserer Behauptung bereits bewiesen, aber auch nur erst einen Theil. Wir haben nämlich gezeigt, daß durch Composition von Grund  $\mathcal{G}'$  Zahlen eines  $\mathcal{G}$ -Stammgitters

$$\mathcal{G}'' = \mathcal{V}aa' X + \frac{\mathcal{B} + \mathcal{V}d}{2\mathcal{V}aa'} Y$$

erhalten werden, aber noch nicht bewiesen, daß auch alle Zahlen dieses Stammgitters sich durch die Composition ergeben. Um dies noch zu zeigen, brauchen wir offenbar nur zu beweisen, daß die Basiszahlen von  $\mathcal{G}''$

$$\mathcal{V}aa' \text{ und } \frac{\mathcal{B} + \mathcal{V}d}{2\mathcal{V}aa'}$$

bei der Composition resultiren. Von der ersten ist dies sofort evident; die zweite ergibt sich auf folgende Weise. Bei der Composition erhalten wir offenbar die Gitterzahlen:

$$\frac{\mathcal{B} + \mathcal{V}d}{2\mathcal{V}a} \mathcal{V}a' \text{ und } \frac{\mathcal{B} + \mathcal{V}d}{2\mathcal{V}a'} \mathcal{V}a,$$

also auch alle Frahen, die in der Formel enthalten sind:

$$\frac{B' + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} \sqrt{a}' z_1 + \frac{B' + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}'} \sqrt{a} z_2 \text{ oder}$$

$$\frac{B' + \sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}} (a' z_1 + a z_2),$$

unter  $z_1$  und  $z_2$  ganze rationale Zahlen verstanden. Da nun  $a'$  und  $a$  teilerfremd sind, ist  $z_1$  und  $z_2$  stets so zu bestimmen, daß  $a' z_1 + a z_2 = 1$  wird, d. h.

$$\frac{B' + \sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}$$

wird bei der Composition ebenfalls erhalten.

Nimmt man noch hinzu, was selbstverständlich ist, daß durch die Orientierung von  $G$  und  $G'$  auch die von  $G''$  bestimmt ist, so können wir jetzt den Satz aussprechen:

Zwei irgendwie orientirte Stammgitter ergeben componirt wieder ein ganz bestimmt orientirtes Stammgitter.

Der vorstehende Satz ist der Fundamentalsatz der ganzen Theorie, auf dem, im Grunde genommen, alles folgende ruht. Bei seinem Beweise sind wir erst auf Umwegen zu der durch Composition resultirenden Form gelangt; es giebt aber auch eine Regel, wie man direct diese Form finden kann. Wir führen dieselbe hier ohne Beweis an, indem wir auf eine Abhandlung von Arndt, Crelle's Journal Bd. 56, 1857 verweisen. Es mögen die früheren Zeichnungen beibehalten werden, es seien also die zu componirenden Gitter:

$$\sqrt{a}x + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y \text{ u. } \sqrt{a'}x' + \frac{b' + \sqrt{d'}}{2\sqrt{a'}}y'$$

Die für das componirte Gitter charakteristischen Zahlen  $a''$  und  $b''$  werden dann auf folgende Weise bestimmt: Es wird

$$a'' = \frac{aa'}{\mu^2},$$

wo  $\mu$  der grösste gemeinsame

Teiler von

$a, a'$  und  $\frac{b+b'}{2}$  ist. Weiter  
muss  $b''$  den 3 Congruenzen genü-  
gen

$$b'' \equiv b \pmod{\frac{2a}{\mu}} \quad b'' \frac{a'}{\mu} \equiv b \frac{a'}{\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$$

$$b'' \equiv b' \pmod{\frac{2a'}{\mu}} \quad \text{oder} \quad b'' \frac{a}{\mu} \equiv b' \frac{a}{\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$$

$$\left(\frac{b+b'}{2\mu}\right) b'' \equiv \frac{bb'+d}{2\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}} \quad b'' \frac{b+b'}{2\mu} \equiv \frac{bb'+d}{2\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$$

Bezeichnet man nun mit  $r, s, t$  drei  
ganze rationale Zahlen, die der Be-  
dingung genügen

$\frac{a'}{\mu} r + \frac{a}{\mu} s + \frac{b+b'}{2\mu} t = 1$  (solche gibt  
es stets, da  $\frac{a}{\mu}, \frac{a'}{\mu}$  und  $\frac{b+b'}{2\mu}$  teiler-  
fremd sind), so erhält man, wenn  
man die 3 Congruenzen resp. mit  
 $r, s, t$  multiplicirt und addirt:

$$b'' = b \frac{a'}{\mu} r + b' \frac{a}{\mu} s + \frac{bb'+d}{\mu} \frac{b+b'}{2\mu} t \\ \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2} = 2a'}$$

Damit ist aber  $b''$  völlig festgelegt,

denn dasselbe ist offenbar nur mod  $2a''$  bestimmt.

Die Compositionstheorie ist von Gauss in den Disquisitiones arithmeticae begründet worden. Gauss spricht natürlich nicht von den Silberzahlen, sondern von den  $\sqrt{d}$ -gehörigen Formen. In der Composition der Formen kommen wir unmittelbar, indem wir in der Gleichung:

$$\left( \sqrt{a}x + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y \right) \left( \sqrt{a'}x' + \frac{b' + \sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}y' \right) = \sqrt{a''}x'' + \frac{b'' + \sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}y''$$

rechts und links die Norm bilden. Die so entstehende Gleichung:

$$(ax^2 + bxy + cy^2)(a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2) = ax''^2 + b'x''y'' + c'y''^2$$

Können wir folgendermassen in Worte fassen:

Die rechts stehende Form zerfällt in das Product der beiden links stehenden, wenn wir für  $x''$ ,  $y''$  gewisse binäre ganzzahlige Verbindungen

der  $x^2 y$  und  $x' y'$  einsetzen (wie sie aus den Formeln (1) pg. 126 hervorgehen)

Wir können aber diese Darstellung der Theorie unmöglich für zweckmäßig halten. Offenbar dringen wir tiefer in den wahren Sachverhalt ein, wenn wir von den complexen Factoren als wenn wir von ihrem Product, den Formen, sprechen. Denn der einzelne complexe Factor enthält absoluten Betrag + Azimuth, während in dem correspondirenden Werthe der Form nur der absolute Betrag hervortritt.

Die Composition der Formen ist nur ein Corollar, nicht ein Aequivalent für die Composition der Gitterzahlen.

Man wird dies umso mehr zugeben, wenn man bedenkt, daß der Rückschluss von den Formen zu den Gittern nicht ohne weiteres möglich ist. Es kann sehr wohl sein, daß eine Stammform  $F^2$ , wenn man für ihre Variablen ganzzahlige

bilineare Verbindungen zweier andern Variabelnpaare setzt, in das Product zweier Stammformen  $F$  und  $F'$  zerfällt, ohne dass darum ein zu  $F''$  gehöriges Gitter sich aus 2 passend orientirten zu  $F$  und  $F'$  gehörigen 2 Gittern componiren liesse.

Man kann die Frage aufwerfen, warum Gauss dennoch diese Form der Darstellung gewählt hat. Wir können natürlich darüber nichts Bestimmtes aussagen. Immerhin hat, wenn man die späteren Ausführungen von Gauss über die Gittervorstellung im Falle negativer Discriminanten (vergl. seine Anzeige des Buches von Seeber, Ges. Werke Bd. I) und seine Publicationsweise berücksichtigt, die Auffassung manches für sich, dass Gauss selbst im Besitz der Gitterzahlen sein mochte, daß er aber aus persönlichen Gründen die Composition der Gitterzahlen hinter der Composition der

quadratischen Formen und also die Zerlegung der gewöhnlichen Formen in complexe Factoren hinter der Darstellung dieser Formen durch die entsprechenden Formen verborgen hat. Ubrigens geht die Idee, zerlegbare Formen (insbes. die binären quadratischen Formen) zu componiren, auf Lagrange zurück.

Ehe wir weiter in der Theorie fortschreiten, wird es zweckmässig sein, noch einige specielle Fälle unseres Fundamentalsatzes zu betrachten.

1. Sind die beiden zu componirenden Gitter mit dem Hauptgitter identisch, so muß das resultirende Gitter wieder das Hauptgitter sein, denn nach unserem Satze muß das Resultat der Composition wieder ein Stammgitter sein und überdies muß es das Product  $1 \cdot 1$  enthalten, da  $1$  in den beiden zu componirenden Gittern vorkommt. Es muß infolgedessen mit dem Hauptgitter identisch sein. Wir



Können also den Satz aussprechen:

Componirt man das Hauptgitter mit sich, so resultirt wieder das Hauptgitter.

Dieser Satz lautet in Bezug auf die Litterzahlen:

Zwei Hauptzahlen mit einander multiplicirt geben wieder eine Hauptzahl.

Es lässt sich in dieser Fassung auch leicht rein rechnerisch nachweisen. Wir betrachten zunächst den Fall  $d \equiv 0 \pmod{4}$ . Die beiden Hauptzahlen seien:

$$\xi = x + y \frac{\sqrt{d}}{2}, \quad \eta = x - y \frac{\sqrt{d}}{2},$$

$$\xi' = x' + y' \frac{\sqrt{d}}{2}, \quad \eta' = x' - y' \frac{\sqrt{d}}{2}.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \xi\xi' &= (x + y \frac{\sqrt{d}}{2})(x' + y' \frac{\sqrt{d}}{2}) = (xx' + yy' \frac{d}{4}) + (xy' + yx') \\ &= x'' + y'' \frac{\sqrt{d}}{2} \end{aligned}$$

$$\eta\eta' = \dots \dots \dots = x'' - y'' \frac{\sqrt{d}}{2}.$$

d. h. das Product ist wieder eine Hauptgitterzahl, da  $x''$ ,  $y''$  für alle ganzzahligen Werte von  $x$ ,  $x'$ ,  $y$ ,  $y'$  gemäss der Voraussetzung  $d \equiv 0 \pmod{4}$  ebenfalls ganze Zahlen sind.

Ähnlich im Falle  $d \equiv 1 \pmod{4}$ . Sind die zu multiplicirenden Gitterzahlen:

$$\xi = x + y \frac{1 + \sqrt{d}}{2}, \quad \eta = x' + y' \frac{1 - \sqrt{d}}{2},$$

$$\xi' = x' + y' \frac{1 + \sqrt{d}}{2}, \quad \eta' = x'' + y'' \frac{1 - \sqrt{d}}{2},$$

so ergibt sich durch Multiplication

$$\begin{aligned} \xi \xi' &= \left( x + y \frac{1 + \sqrt{d}}{2} \right) \left( x' + y' \frac{1 + \sqrt{d}}{2} \right) = \\ &= \left[ xx' + yy' \cdot \frac{d+1}{4} \right] + (xy' + x'y) \cdot \frac{1 + \sqrt{d}}{2} \\ &= x'' + y'' \frac{1 + \sqrt{d}}{2}, \end{aligned}$$

womit unsere Behauptung auch in diesem Falle gerechtfertigt ist.

Wir bemerken noch, dass unsere Behauptung vom Standpunkte der Körpertheorie ganz selbstverständlich ist. Wir haben nämlich nur gezeigt, dass das Product zweier ganzer Zah.

len des Körpers  $V_d$  wieder eine ganze Zahl desselben Körpers ist.

2. Ist von den beiden zu componirenden Gittern das eine das Hauptgitter  $H$ , das andere ein Nebengitter  $G$ , in beliebiger Orientirung, so ergibt sich durch Composition beider wieder das Nebengitter  $G$  in derselben Orientirung. Denn das resultirende Gitter muß offenbar, da das Hauptgitter die  $1$  enthält, das Gitter  $G$  enthalten und infolgedessen mit ihm identisch sein, da beide dieselbe Discriminante haben.

Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Componirt man ein beliebiges Nebengitter mit dem Hauptgitter, so resultirt dasselbe Nebengitter, u. zw. gleichviel, wie wir uns den Azimuthalfactor  $\varphi$  bestimmen denken.

Für die Gitterpunkte lautet der entsprechende Satz:

Multipliziert man einen Punkt

eines Nebengitters mit einem Punkte  
des Hauptgitters, so erhält man ei-  
nen Punkt desselben Nebengitters.

Um die Richtigkeit dieses Satzes  
rechnerisch nachzuweisen, betrach-  
ten wir zunächst wieder den Fall  
 $d \equiv 0 \pmod{4}$ . Wir haben dann:

$$\xi = x + y \frac{\sqrt{d}}{2}, \quad \eta = x - y \frac{\sqrt{d}}{2}$$

$$\xi' = \rho \left( \sqrt{d} x' + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{d}} y' \right), \quad \eta' = \frac{1}{\rho} \left( \sqrt{d} x' + \frac{b - \sqrt{d}}{2\sqrt{d}} y' \right).$$

Das Product  $\xi\xi'$  lässt sich nun  
schreiben:

$$\xi\xi' = \rho \left( \sqrt{d} x'' + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{d}} y'' \right),$$

wenn man

$$x'' = xx' - \frac{b}{2} yx' - cyx', \quad y'' = xy' + ayx' + \frac{b}{2} yy'$$

setzt, d. h. der Punkt  $(\xi\xi', \eta\eta')$  ge-  
hört wieder demselben Nebengitter  
wie  $(\xi', \eta')$  an, denn  $x''$  und  $y''$  sind  
für alle ganzzahligen Werte von  
 $x, x', y, y'$  selbst ganze Zahlen, da

im Falle  $d \equiv 0 \pmod{4}$  auch die  
Congruenz  $b \equiv 0 \pmod{2}$  besteht.

Bei  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , wobei gleich-  
zeitig  $b \equiv 1 \pmod{2}$  ist, erhält man  
in analoger Weise:

$$\xi \xi' = 9 \left( \sqrt{a} x'' + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} y'' \right), \text{ wo}$$

$$x'' = xx' + \frac{b}{2} yx' - cyz' \quad y'' = xy' + ayx + \frac{b}{2} yz'$$

ist.

Ein specieller Fall unseres letzten  
Satzes ist uns von früher her wohl  
bekannt, wir meinen die Aufsu-  
chung der Automorphismen eines  
Quadrats mit Hilfe der Pell'schen  
Gleichung. Wir bemerkten bereits,  
dass die Pell'sche Gleichung da-  
rauf hinauskommt, die jederman-  
lige Hauptform  $= 1$  zu setzen,  
also  $x^2 - \frac{d}{4} y^2 = 1$ , bez.  $x^2 + xy + \frac{1-d}{4} y^2 = 1$ .  
Aus diesen  $x, y$  stellten wir uns die  
Größen:

$$\xi, \eta = x \pm y \frac{\sqrt{d}}{2}, \text{ resp. } \xi, \eta = x + y \frac{1 \pm \sqrt{d}}{2}$$

her.

Wir nannten dieselben Einheiten, weil ihre Norm gleich 1 ist. Wir können dieselben nach unserer jetzigen Terminologie als Coordinates der Einheitspunkte des Hauptgitters bezeichnen, nämlich derjenigen Gitterpunkte, welche den „Abstand“ 1. von O besitzen.

Mit den Einheiten  $\xi, \eta$  multiplicirten wir früher die Gitterzahlen  $\xi', \eta'$  eines beliebigen zur Discriminante  $d$  gehörigen Gitters. Es zeigte sich, daß dabei ein dem ursprünglichen congruentes Gitter entstand, daß wir also eine Automorphie des Gitters erhielten. Dieser Umstand erklärt sich jetzt einfach aus dem eben bewiesenen Satze.

Zunächst ist nach unserem Satze klar, daß der Punkt  $(\xi, \eta) \cdot (\xi', \eta')$  wieder dem Gitter  $(\xi', \eta')$  angehören muß. Während aber im allgemeinen durch Multiplication eines Punktes  $(\xi, \eta)$  des Hauptgitters mit den sämtlichen

Punkten  $(\xi, \eta)$  ein dem Gitter  $\xi, \eta$  eingelagertes Gitter entsteht, dessen einzelne Maschen sich aus mehreren Maschen des ursprünglichen Gitters zusammensetzen, bringt es die Wahl des Punktes  $(\xi, \eta)$  in unserem Falle mit sich, daß wir ein dem ursprünglichen congruentes Gitter erhalten. In der That wird wegen  $N(\xi) = 1$  auch  $N(\xi, \xi') = N(\xi')$ . Der Abstand der Gitterpunkte von  $O$  wird also durch die Multiplication des Gitters mit dem Punkte  $(\xi, \eta)$  nicht geändert. Das neue Gitter wird daher dem alten congruent sein, so daß sich in der That eine Automorphie ergibt. Ist  $(\xi, \eta)$  kein Einheitspunkt, so wird das neue Gitter mit dem alten nur ähnlich sein.

Wir betrachten endlich den Fall conjugirter Stammgitter, bezüglich derer wir den Satz aussprechen:

Produkte aus conjugirten Gittern geben multiplicirt Hauptzahlen

(vorausgesetzt, dass wir an der früher ver-  
abredeten Orientierung conjugirter Gitter  
festhalten)

Sind die Gitterzahlen aus den rich-  
tig orientirten conjugirten Gittern:

$$\xi = \rho (\sqrt{\alpha} x + \frac{\beta + \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}} y), \quad \eta = \frac{\rho}{\rho'} (\dots),$$

$$\xi' = \frac{\rho}{\rho'} (\sqrt{\alpha} x' + \frac{-\beta + \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}} y'), \quad \eta' = \rho' (\dots),$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi \xi' &= (\alpha x x' - \frac{\beta}{2} x y' + \frac{\beta}{2} y x' - \rho \rho') + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} (x y' + y x') \\ &= [\alpha x x' - \frac{\beta+1}{2} x y' + \frac{\beta-1}{2} y x' - \rho \rho'] + \frac{1+\sqrt{\alpha}}{2} (x y' + y x') \end{aligned}$$

Aus dieser Doppelgleichung folgt die  
Richtigkeit unseres Satzes sowohl für  
 $d \equiv 0 \pmod{4}$  (erste Heile) wie auch  $d \equiv 1$   
 $\pmod{4}$  (zweite Heile), da die Klammer-  
grössen stets ganze Zahlen sind.

Für die Composition conjugirter  
Stammgitter folgen wir noch leicht dem  
Satz:

Conjugirte Stammgitter geben com-  
ponirt das Hauptstammgitter.

Dem das resultirende Gitter muss



ein Stammgitter sein und enthält über-  
dies nach dem eben Bewiesenen Haupt-  
zahlen, es muß also das Hauptstamm-  
gitter sein.

19. VI. 96. Die von uns begründete  
Composition der Gitter fassen wir  
in die symbolische Gleichung zus-  
ammen:

$$G, G', G''$$

Dieselbe zeigt, daß unsere  $h$  Gitter  
 $G, G', G'', \dots, G^{(h-1)}$   
ein geschlossenes Ganzes bilden und  
daß wir bei der Composition im-  
mer wieder zu einem unserer  $h$   
Elemente kommen. Die vorstehen-  
de Gleichung ist auch umkehr-  
bar in dem Sinne daß wir zu  
 $G'$  und  $G''$  in eindentiger Weise  
ein zugehöriges  $G$  finden können.  
Dabei berücksichtigen wir, daß bei  
der Composition das Hauptgit-  
ter  $G_0$  die Rolle der Einheit  
spielt und daß zwei conjugirte  
Gitter  $G$  und  $G'$  dementsprechend  
als inverse Elemente angesehen

werden müssen. Wir können nämlich den Satz von pg. in die symbolische Gleichung fassen

$$J J_0 = J \text{ oder } J_0 = 1.$$

und den Satz von pg. in die folgende Gleichung:

$$J \bar{J} = J_0 = 1.$$

In Folge dessen erhalten wir aus der Compositions-gleichung  $J J' = J'$ , in dem wir rechts und links mit  $\bar{J}$  componiren:

$$J' \bar{J} = J J' \bar{J} = J J_0 = J.$$

Das Gitter  $J$  ist also in der That eindeutig durch  $J'$  und  $\bar{J}$  bestimmt. Endlich berücksichtigen wir, daß die Operation der Multiplication eine commutative Operation ist, so daß

$$J J' = J' J$$

wird. Alle diese Thatsachen fassen wir in die einfache Aussage zusammen:

Unsere  $h$  Gitter bilden eine

Gruppe vertauschbarer Elemente.

Die Eigenschaften dieser Gruppe sind u. a. studirt worden von

Schering: Die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen, Göttinger Abhandlungen Bd. 14.

und von

Frobenius und Gickelberger: Ueber Gruppen vertauschbarer Elemente, Crelle Bd 86, 1878.

Nebenbei bemerken Sie an dem Titel dieser Abhandlungen die Fortschritte, welche der Gruppenbegriff in den letzten Decennien gemacht hat. Während in der früheren Arbeit die specielle Beschaffenheit der Elemente, aus denen die Gruppe besteht, betont wird, abstrahirt die zweite Arbeit hiervon gänzlich und hebt nur ihre Gruppeneigenschaft hervor, wie solches der Allgemeinheit des Gruppenbegriffes in der That besser entspricht.

Wir führen hier eine Reihe einfacher

Sätze an, zu denen die genannten Autoren gelangen; die übrigen ganz einfachen Beweise sollen der Kürze halber fortgelassen werden.

1. Wir greifen irgend eines der  $h$  Gitter heraus und componiren das selbe mit sich selbst. Dabei muß wegen der Endlichkeit der Gruppenelemente einmal, sagen wir nach  $k$ -maliger Composition, die Einheit auftreten. Wir bilden also:

$$G, G^2, G^3, \dots, G^k = 1.$$

Unser erster Satz lautet nun, dass der „Grad“  $k$  notwendig ein Theiler von  $h$  sein muß.

2. Es könnte sein, daß zufälliger Weise  $k = h$  wird. Ein solches Gitter nennen wir ein „erzeugendes Gitter“ und bezeichnen dasselbe mit  $T$ . Wir können dann die ganze Reihe der Gitter in der Form

$$T, T^2, T^3, \dots, T^h = 1$$

anschreiben.

3. Wenn  $k \neq h$  ist, so wird es jedenfalls ein Gitter geben, für welches  $k$  einen maximalen Werth hat. Wir schreiben dann zunächst die folgenden  $k$  Gitter auf:

$$T, T^2, \dots, T^k = 1.$$

Darauf suchen wir unter den älteren Gittern dasjenige ( $T_1$ ) auf, dem der grösste hier noch vorkommende Grad ( $k_1$ ) zukommt. Wir können dann  $k_1$  Gittern die Form geben:

$$T_1, T_1^2, \dots, T_1^{k_1} = 1.$$

Durch Combination dieser  $k_1$  mit den früheren  $k$  Gittern ergeben sich  $k, k, \dots$  Gitter

$$T_1^d T^d, \left\{ \begin{array}{l} d \equiv 0, 1, \dots, k-1 \pmod{k} \\ d \equiv 0, 1, \dots, k_1-1 \pmod{k_1} \end{array} \right\}.$$

4. Fahren wir so fort, so erhalten wir eine abbrechende Reihe von Gittern

$$T, T_1, T_2, \dots$$

$$2x \equiv 0 \pmod{k}$$

$$2x_i \equiv 0 \pmod{k_i}$$

Wir fragen nach der Zahl der An-  
sepsgitter. Diese hängt offenbar da-  
von ab, wie viele der Zahlen  $k_i$  ge-  
rade sind. Ist  $k_i$  ungerade, so  
hat die Congruenz

$$2x_i \equiv 0 \pmod{k_i}$$

nur die eine Lösung  $x_i = 0$ . Ist  
aber  $k_i$  gerade, so gibt es zwei  
 $\pmod{k_i}$  incongruente Lösungen,  
nämlich

$$x_i = 0 \text{ und } x_i = \frac{k_i}{2}.$$

Hiernach beträgt die Zahl der An-  
sepsgitter, wenn  $\tau$  die Anzahl der  
in der Reihe  $k, k_1, k_2, \dots$  vorkom-  
menden geraden Zahlen ist, ein-  
fach  $2^\tau$ .

Wir erläutern diese Dinge durch  
einige Zahlenbeispiele, welche wir  
aus den Tabellen von Cayley  
(vergl. ges. Werke Bd. I. pag. 141 ff.)

zusammenstellen. Wir wählen dabei Gitter von negativer Discriminante aus, weil uns diese wegen der Anwendung auf die Theorie der elliptischen Functionen besonders wichtig sind. Es sei zunächst

$$1. \underline{d = -356 = -4 \cdot 89.}$$

Die Classenanzahl  $h$  ergibt sich aus der Anzahl der reducirten Formen und diese aus der Anzahl der Zahlentripel  $a, b, c$ , für welche

$$|b| \leq a \leq c, \quad -356 = b^2 - 4ac.$$

Man findet die folgenden reducirten Formen:

$a$	$b$	$c$
1	0	89
2	2	45
3	$\pm 2$	30
5	$\pm 2$	18
6	$\pm 2$	15
7	$\pm 6$	14
9	$\pm 2$	10

Die beiden ersten Formen charakteri-

siren sich als Ancepsformen, speciell die erste als Hauptform. Die übrigen sind paarweise als conjugirte Formen zusammengeordnet. Die Zahl der reducirten Formen und daher die Classenanzahl beträgt 12.

Bei der Composition wollen wir mit der Form

$$T' = (3, \pm 2, 30)$$

beginnen und die successiven Potenzen derselben bilden. Nach unserer obigen Regel für die Composition der zu den Formen  $(a, b, c)$  und  $(a', b', c')$  gehörigen Litterzahlen, haben wir den grössten gemeinsamen Theiler  $\mu$  der Zahlen

$$a = 3, \quad a' = 3, \quad \frac{b + b'}{2} = 2$$

zu suchen, welcher gleich 1 ist.

Es wird also

$$\alpha = 3, \quad \alpha' = 3, \quad \beta = 2.$$

Daraus folgt  $a'' = 9$ . Zur Berechnung von  $b''$  haben wir die Congruenzen



$$b'' \equiv 2 \pmod{6}$$

$$b'' \equiv 2 \pmod{6}$$

$$4b'' \equiv 4(1-89) \pmod{36} \text{ oder}$$

$$b'' \equiv -88 \pmod{9} \text{ oder endlich}$$

$$b'' \equiv +2 \pmod{9}.$$

Die gemeinsame Lösung dieser drei Congruenzen ist offenbar

$$b'' = 2 \text{ oder allgemeiner } b'' = 2 + 18m.$$

Die dem Gitter  $T^2$  entsprechende Form wird also

$$(9, 2, 10),$$

welche sich zufälliger Weise unter unsern reducirten Formen vorfindet.

Wir gehen darauf zu  $T^3$  und bilden zu dem Zwecke:

$$(9, 2, 10) \quad (3, 2, 30).$$

Jetzt haben wir

$$\alpha = 9, \alpha' = 3, \frac{\alpha + \alpha'}{2} = 2,$$

also  $\mu = 1$  und

$$\alpha = 9, \alpha' = 3, \beta = 2, \alpha'' = 27.$$

Die Congruenzen zur Bestimmung von  $b''$  sind

$$b' \equiv 2 \pmod{6}$$

$$b'' \equiv 2 \pmod{18}$$

$$b''' \equiv 20 \pmod{27},$$

woraus wir schliessen

$$b'' = 20 \text{ bez. } b'' = 20 + m \cdot 54.$$

Die dem Gitter  $T^3$  entsprechende Form wird also

$$(27, 20, 7) = 27x^2 + 20xy + 7y^2$$

Diese Form ist noch nicht reduziert. Sie wird es aber mittelst der unimodularen Substitution

$$x = -y'$$

$$y = x' + y'.$$

Wir haben nämlich

$$27x^2 + 20xy + 7y^2 = 7x'^2 + (-20+14)x'y' + (27-20+7)y'^2 = (7, -6, 14).$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so erkennen wir, dass wir successive unsere 12 Formen aus unserem Ausgangsgitter  $T$  ableiten können. Es liegt hier also der pag 146 sub 2 hervorgehobene besondere Fall vor. Die Reihenfolge,

in der unsere 12 reduzierten Formen erhalten werden, ist diese

$$\begin{array}{ll}
 T^0 = (-1, 0, 89) & T^6 = (2, 2, 45) \\
 T^1 = (3, 2, 30) & T^7 = (6, 2, 15) \\
 T^2 = (9, 2, 10) & T^8 = (5, -2, 18) \\
 T^3 = (7, -6, 14) & T^9 = (7, 6, 14) \\
 T^4 = (5, 2, 18) & T^{10} = (9, -2, 10) \\
 T^5 = (6, -2, 15) & T^{11} = (3, -2, 30)
 \end{array}$$

Übrigens bewähren sich noch die sub 4 und 8 angegebenen Regeln über die conjugirten - und die Ancepsgitter. In der vorstehenden Reihe sind je zwei solche Gitter  $T^\alpha$  und  $T^\beta$  conjugirt, für welche  $\alpha + \beta = k = 12$ , während die Gitter  $T^0$  und  $T^6$  Anceps-Gitter sind, da ihre Exponenten der Congruenz  $2a \equiv 0 \pmod{12}$  genügen. Die Zahl der Ancepsgitter beträgt, wie es sein muß,  $2^{\tau} = 2$ , indem die in unserem Fall allein vorhandene Zahl  $k = 12$  eine gerade Zahl ist. Als zweites Beispiel wählen wir

$$2.) \quad d = -972 = -4 \cdot 243.$$

Die Klassenanzahl ist hier  $h = 9$ .  
Die vorhandenen neun reduzierten  
Formen schreiben wir sogleich nach  
ihrer Erzeugungsweise in die Tabel-  
le zusammen.

$$\begin{aligned} T^0 &= (4, 2, 61), T^1 T^1 = (4, 2, 61), T^0 T^2 = (4, -2, 61), \\ T^1 &= (7, 6, 36), T^1 T^1 = (13, -4, 19), T^1 T^2 = (9, -6, 28), \\ T^2 &= (7, -6, 36), T^2 T^1 = (9, 6, 28), T^2 T^2 = (13, 4, 19). \end{aligned}$$

Hier haben wir zwei erzeugende  
Gitter  $T$  und  $T_1$  mit den Exponen-  
ten  $k = 3$  und  $k_1 = 3$ . Wiederum sind  
diejenigen Gitter paarweise conjugirt,  
für welche

$$\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{3} \text{ und gleichzeitig}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \equiv 0 \pmod{3}$$

ist. Da die Anzahl  $\tau$  der in  
der Reihe  $k = 3, k_1 = 3$  vorkom-  
menden geraden Zahlen 0 be-  
trägt, so wird die Anzahl der  
Ancepsgitter  $2^0 = 1$ . In der That  
gibt es hier keine andere An.

cepsform als die Hauptform.  
 25. II. 96. Wir benutzen jetzt die  
 Gleichung

$$J = T^a T_1^a, \dots$$

um die Orientirung unserer  $k$   
 Gitter  $J$  definitiv festzulegen.  
 Bisher haben wir nur die Lage des  
 Hauptgitters und die gegenseitige La-  
 ge zweier conjugirter Gitter be-  
 stimmt. Das Entsprechende soll  
 jetzt allgemein für jedes Gitter  
 geschehen. U. zw. wollen wir es so  
 einrichten, daß der folgende Satz  
 Gültigkeit bekommt:

Zwei Punkte aus orientirten Gitter-  
tern geben multiplicirt wieder ei-  
nen Gitterpunkt in richtiger  
Orientirung.

Wir beginnen mit dem erzeugenden  
 Gitter  $T$ . Wenn wir dieses  $k$ -mal  
 mit sich selbst componiren, so  
 ergibt sich, wie wir sahen, das  
 Hauptgitter. Dem soeben genann-  
 ten Princip entsprechend müssen  
 wir also  $T$  so orientiren, daß

zige vorhandene Autamorphie in einer Drehung des Gitters durch den Winkel  $\pi$ . Es findet sich daher der fragliche Punkt  $e^{ki} \tau_a^k$  in dem Hauptgitter ausser unter dem Azimuthe  $\phi$  nur noch unter dem Azimuthe  $\phi + \mu \pi$  vor, wo  $\mu$  irgend eine ganze Zahl bedeutet. Soll also  $e^{ki} \tau_a^k$  direct in einen correspondierenden Punkt des Hauptgitters übergehen, so muss

$$k\varphi = \phi + \mu \pi$$

oder

$$\varphi = \frac{\phi + \mu \pi}{k}$$

gewählt werden. Andererseits können wir uns darauf beschränken,  $\mu$  die zu  $k$  incongruenten Werte  $\mu = 0, 1, 2, \dots, k-1$  durchlaufen zu lassen, um alle möglichen mit unserer obigen Festsetzung verträglichen Orientierungen von  $T$  zu erhalten. Dem auch das

Gitter  $T$  besitzt doch die vorher genannte Automorphie, so daß zwei Orientirungen, welche sich nur um ein Vielfaches von  $\pi$  unterscheiden, als identisch gelten müssen. In Folge dessen bekommen wir gerade  $k$  zulässige Orientirungen des Gitters  $T$ . Von diesen greifen wir irgend eine heraus und legen sie unserer Normalfigur zu Grunde.

Dasselbe machen wir mit dem erzeugenden Gitter  $T_1$ . Dieses geht durch  $k_1$ -malige Composition in das Hauptgitter über. Demnach müssen wir das Azimuth  $\varphi_1$  dieses Gitters so wählen, daß

$$k_1 \varphi_1 = \phi_1 + \mu_1 \pi$$

oder

$$\varphi_1 = \frac{\phi_1 + \mu_1 \pi}{k_1}$$

wird. Für  $T_1$  ergeben sich also  $k_1$  zulässige Lagen. Ebenso für  $T_2$   $k_2$  Lagen etc.

Im Ganzen ergeben sich so

$k, k_2, \dots = h$  verschiedene Mög-  
lichkeiten, unsere Normalfigur zu  
entwerfen. Indem wir bei der Orienti-  
 rung der Gitter  $T_1, T_2, \dots$  den ganzen  
 Zahlen  $\mu$  willkürliche, aber bestimm-  
 te Werthe beilegen, greifen wir un-  
 ser den  $h$  Möglichkeiten eine be-  
 stimmte, aber beliebige heraus und  
 halten an dieser für die Folge fest.

Die nunmehr definirten Neben-  
 gitterzahlen mögen wir noch arith-  
 metisch characterisiren. Sie ge-  
 hören nicht direkt dem Körper  
 $\mathbb{V}_d$  an, wohl aber je einem Neben-  
 Körper desselben, welcher dadurch  
 entsteht, daß wir zu  $\mathbb{V}_d$  bez. die  
 Irrationalitäten

$$\mathbb{V}_d \text{ e } i \frac{\phi + \mu \pi}{k}, \mathbb{V}_d, \text{ e } i \frac{\phi_1 + \mu \pi}{k_1}, \dots$$

adjungiren. In der That lassen  
 sich alle Gitterzahlen von  $T_1$  ra-  
 tional durch  $\mathbb{V}_d$  und  $\mathbb{V}_d \text{ e } i \frac{\phi + \mu \pi}{k}$ ,  
 alle Gitterzahlen von  $T_2$  durch  
 $\mathbb{V}_d$  und  $\mathbb{V}_d, \text{ e } i \frac{\phi_1 + \mu \pi}{k_1}$  etc. auf-



laufen.

Überdies sind alle Nebengitterzahlen algebraische ganze Zahlen. Bei spielerweise liefert jeder Punkt von  $T$ , in die  $k^{\text{te}}$  Potenz erhoben, einen Punkt des Hauptgitters. Da nun die Zahlen des Hauptgitters einer quadratischen Gleichung genügen, deren erster Coefficient 1 ist, so befriedigen die Zahlen von  $T$  eine Gleichung  $2^{\text{ten}}$  Grades deren erster Coefficient gleichfalls die Einheit ist.

Wir fügen noch einen Hilfssatz hinzu, der uns später nützlich sein wird. Wir behaupten:

Ein Ausdruck von der Form der Nebengitterzahlen, in welchem  $x = x_0$  und  $y = y_0$  als rational vorausgesetzt werden, kann nur dann eine ganze algebraische Zahl sein, wenn  $x_0$  und  $y_0$  ganze Zahlen sind.

Zum Beweise denken wir uns den fraglichen Ausdruck

$$1) \quad \xi \left( \sqrt{a} x_0 + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} y_0 \right)$$

mit den Zahlen des zu dem Gitter  
( $a, b, c$ ) conjugirten Gitters multi-  
plicirt, d. h. mit

$$2) \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \sqrt{a} x + - \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} y \right),$$

wo  $x$  und  $y$  beliebige ganze ratio-  
nale Zahlen bedeuten sollen. Bei  
der Multiplication ergibt sich ein  
Ausdruck von der Form der Haupt-  
zahlen, nämlich, je nachdem  $d \equiv 0$   
oder  $\equiv 1 \pmod{4}$  ist:

$$3) x^2 + y^2 \frac{\sqrt{d}}{2} \text{ bez } x^2 + y^2 \frac{1 + \sqrt{d}}{2};$$

hierbei wird nach pag. 142.

$$4) y = x y_0 + y x_0.$$

Nun setzen wir voraus, dass 1) eine  
ganze algebraische Zahl ist. Durch  
Multiplication mit dem Ausdruck  
2), welcher ebenso eine ganze al-  
gebraische Zahl darstellt, entsteht  
wieder eine ganze algebraische  
Zahl. Die Ausdrücke 3) sind da-  
her ganze Zahlen des Körpers  
 $\sqrt{d}$ . Infolgedessen müssen  $x$  und

$y$  ganze rationale Zahlen sein u. zw. für alle ganzzahligen Werte von  $x$  und  $y$ . Daraufhin zeigt aber die Gleichung 4), dass auch  $x_0$  und  $y_0$  ganze Zahlen sein müssen. Setzen wir nämlich etwa  $x = 1, y = 0$  oder  $x = 0, y = 1$ , so sehen wir, dass  $y_0$  bez.  $x_0$  einen ganzzahligen Worth besitzen

2.  $d > 0$ . Bei positiver Discriminante liegen die Dinge ganz ähnlich, nur drücken sie sich hier etwas anders aus. Der Unterschied liegt darin, dass die Azimutthalfactoren  $\rho$  hier reelle Zahlen vorstellen und dass jetzt stets nicht-triviale Automorphismen vorhanden sind. Letztere ergeben sich wie wir wissen aus der kleinsten Lösung  $(t_0, u_0)$  der Pell'schen Gleichung in der Form

$$\left( \frac{t_0 + u_0 \sqrt{d}}{2} \right)^n$$

Da die Automorphismen nur von der Grösse  $d$  abhängen, so sind

168.

sie dem Hauptgitter und den Nebengittern gemeinsam. Geometrisch konnten wir sie als Pseudodrehungen um beliebige Multipla des Pell'schen Winkels

$$i \log \left( \frac{t_0 + u_0 \sqrt{d}}{2} \right)$$

auffassen, welche unsere Gitter mit sich zur Deckung bringen. Der Hauptbestimmung liegt dabei, vermöge unserer obigen geometrischen Transformationen, das Linienpaar  $u^2 - v^2 = 0$  zu Grunde.

Bei der Frage nach der richtigen Orientierung von  $T$  handelt es sich nun um die Bestimmung der reellen und, wie wir hinzufügen können, auch positiven Grösse  $\rho$  in dem allgemeinen Ausdrucke der Gitterzahlen von  $T$ :

$$\rho \left( \sqrt{a} x + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} y \right);$$

(Ein Vorzeichenwechsel von  $\rho$  würde die Lage des Gitters nicht ändern, sondern nur besagen, daß wir in einem anderen

Factor der Linien  $u \pm v = 0$  operieren.)

Im Besonderen genügt es, den Basispunkt  $x=1, y=0$ , d. h. den Punkt

$\rho Va$   
richtig zu legen, woraus dann die richtige Orientierung des ganzen Gitters von selbst folgt.

Durch  $k$ -malige Composition von  $T$  ergibt <sup>sich</sup> das Hauptgitter. Möge nun ein Punkt des Hauptgitters, welcher hierbei dem durch Potenzirung aus  $\rho Va$  entstehenden Punkte ( $\rho^k Va^k$ ) entspricht, unter dem Pseudo-Azimuth  $P$  orientirt sein (wo wir  $P$  wieder als positive Zahl voraussetzen). Es giebt dann noch unendlich viele andere Punkte des Hauptgitters, welche demselben Punkte entsprechen und deren Pseudo-Azimuth durch die Formel

$$P \frac{(t_0 + u_0 Vd)^{\mu}}{2}$$

bestimmt sind. Die Einheit  $\frac{t_0 + u_0 Vd}{2}$  setzen wir hier gleichfalls als posi-

gitter selbst ebenso wie die Ancep-  
Gitter liegen symmetrisch gegen  
sich selbst. Gegenüber der Multi-  
plication bilden die Punkte der Nor-  
malfigur ein abgeschlossenes Ganze,  
indem je zwei Punkte miteinander  
multipliziert einen dritten Punkt  
ergeben, welcher wieder der Nor-  
malfigur angehört.

Die Teilbarkeitsgesetze im Ge-  
biere der orientirten Gitterzahlen

Wir geben nun unserer Betrachtung  
 eine neue Wendung. Wir wollen  
 nämlich das durch die Normalfi-  
 gur definirte Zahlensystem auf  
 die Teilbarkeitsgesetze unterzu-  
 sehen. Das allgemeine Resultat,  
 zu welchem wir gelangen werden,  
 ist dieses:

Die Teilbarkeitsgesetze der gewöhn-  
lichen Zahlentheorie (eindeutige Zer-  
legung in Primfactoren) behalten  
in unserem Gebiete ihre unverän-

dritte Gültigkeit.

Wir erinnern zunächst kurz an die Theilbarkeit im gewöhnlichen Zahlengebiete.

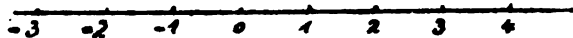
Man nennt eine ganze Zahl theilbar durch eine zweite, wenn der Quotient wieder eine ganze Zahl ist. Man bezeichnet ferner als Einheiten solche Zahlen, durch welche die 1 theilbar ist, und als Primzahlen solche, welche ausser durch sich selbst nur durch Einheiten getheilt werden können. In dem gewöhnlichen Zahlengebiete giebt es nur zwei Einheiten, nämlich die Zahlen  $+1$  und  $-1$ .

Der Fundamentalsatz der gewöhnlichen Zahlentheorie besagt nun:

Jede ganze Zahl  $n$  lässt sich auf eine und nur auf eine Weise in ein Produkt von Primzahlen zerlegen, wobei natürlich Einheiten in beliebiger Weise den einzelnen Factoren hinzugefügt

werden können, wenn nur das Pro-  
dukt derselben insgesamt  $+1$  ist.

Das gewöhnliche Zahlengebiet



mögen wir etwa gleichfalls geometrisch auffassen als ein Gitter von einer Dimension. Dadurch wird die Analogie mit unserem jetzigen Zahlengebiet klar. Wir haben jetzt nicht ein eindimensionales, sondern ein zweidimensionales Gebiet zu betrachten und in diesem nicht ein Gitter, sondern eine endliche Anzahl von Gittern. Gleichzeitig soll hiermit angedeutet werden, dass wir bei der Verallgemeinerung der gewöhnlichen Theilbarkeitsgesetze bei dem zweidimensionalen Gebiete nicht stehen zu bleiben brauchen, sondern auch drei-dimensionale, vier-dimensionale Gitter etc. betrachten können.

Wir übertragen nun die Definitionen der gewöhnlichen Zahlentheorie



rie auf unser zweidimensionales Gebiet. Dabei werden wir, strenge genommen, „Punkt“ statt „Zahl“ sagen müssen.

1. Ein Punkt unseres Zahlengebietes heißt theilbar durch einen anderen, wenn der Quotient beider ein ganzzahliger Punkt ist, (d. h. ein Punkt, dessen Coordinaten ganze algebraische Zahlen sind).

2. Als „Einheitspunkt“ bezeichnen wir solche Punkte, durch welche der Punkt  $(1, 1)$  theilbar ist. Die Einheitspunkte sind allgemein gegeben durch die Formel:

$$\xi = \left( \frac{t_0 + u_0 \sqrt{d}}{2} \right) u \quad \bar{\xi} = \left( \frac{t_0 - u_0 \sqrt{d}}{2} \right) u,$$

wo  $t_0$  und  $u_0$  bestimmte ganzzahlige Lösungen der Pell'schen Gleichung bedeuten.

Wie wir wissen, giebt es bei positivem  $d$  unendlich viele Einheitspunkte, bei negativem  $d$  nur eine endliche Anzahl.

3. Wir nennen „Primpunkte“ sol-

die Punkte  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ , welche durch keine anderen Punkte theilbar sind, als durch die Einheitspunkte und durch sich selbst.

4. Zwei Punkte heissen relativ prim, wenn es ausser den Einheitspunkten keine Punkte giebt, die in beiden aufgehen.

5. Ein Punkt  $(\xi, \eta)$  heisst der grösste gemeinsame Theiler zweier Punkte  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$ , wenn die Punkte  $(\frac{\xi_1}{\xi}, \frac{\eta_1}{\eta}), (\frac{\xi_2}{\xi}, \frac{\eta_2}{\eta})$  ganzzahlige relativ prime Punkte sind.

Nachdem diese Definitionen vorausgeschickt sind, können wir dazu übergehen, die elementaren Rechenoperationen für unsere Gitterzahlen zu studiren. Wir betrachten

#### 1. Addition und Subtraction.

Bezüglich dieser Operationen können wir nur das negative Resultat wiederholen, das wir bereits pag 119 ausgesprochen haben,

dass wir nämlich bei Anwendung derselben im allgemeinen unseren Zahlencomplex verlassen. Wenn wir also an der Beschränkung festhalten, dass die vorzunehmenden Operationen immer wieder auf Punkte der Normalfigur führen, so sind Addition und Subtraktion von Gitterpunkten nicht gestattet, abgesehen von der selbstverständlichen Ausnahme, dass die Punkte demselben Gitter angehören.

2. Multiplication. Diese Operation ist im Gegensatz zu den beiden eben genannten uneingeschränkt ausführbar, d. h. wir bekommen durch Multiplication zweier beliebiger Punkte unserer Normalfigur immer wieder einen Punkt derselben, wie wir bereits eingehend nachgewiesen haben.

3. Division. Bezüglich der Division der Gitterpunkte gilt der folgende Satz:

Ist ein Gitterpunkt durch einen

anderen theilbar, so ist der Quoti-  
ent wieder ein Gitterpunkt.

In dem Beweise der folgenden Sätze  
bemerken wir ein für allemal, daß  
wir immer nur die auf die eine  
Gitterzahl ( $\xi$ ) bezüglichen Gleichungen  
hinschreiben wollen, während wir  
in Gedanken durchaus an der  
Auffassung festhalten, daß jedem  
Gitterpunkte zwei Coordinaten  
( $\xi, \eta$ ) zugehören.

Es sei die Zahl  $\xi'$  aus dem Gitter  
 $\mathcal{G}'$  durch die Zahl  $\xi$  aus dem Git-  
ter  $\mathcal{G}$  theilbar. Wir haben dann  
den Quotienten  $\frac{\xi'}{\xi}$  zu betrachten,  
der nach Voraussetzung eine gan-  
ze algebraische Zahl ist. Um dem-  
selben nun zur besseren Beurthei-  
lung einen rationalen Nenner zu  
geben, erweitern wir ihn mit der  
zu  $\xi$  conjugirten Zahl  $\bar{\xi}$ . Ist  
 $\xi \bar{\xi} = r$ , wo  $r$  eine ganze rationa-  
le Zahl bedeutet, so ist

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi' \bar{\xi}}{r}$$

149.

Von liegt  $\xi$  in dem zu  $\mathcal{G}$  conjugirten  
Gitter  $\mathcal{G}'$ , also  $\xi' \xi$  in dem Gitter  $\mathcal{G}'\mathcal{G}$ ,  
es sei etwa:

$$\xi' \xi = \rho \left( \gamma a x_0 + \frac{b + \gamma d}{2\gamma a} y_0 \right).$$

Dann ist

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi' \xi}{\xi} = \rho \left( \gamma a \frac{x_0}{\gamma} + \frac{b + \gamma d}{2\gamma a} \frac{y_0}{\gamma} \right).$$

Da aber  $\frac{\xi'}{\xi}$ , wie wir vorausgesetzt  
haben, eine ganze algebraische Zahl  
sein soll, müssen nach unserem  
Hilfssatze pag 165 auch  $\frac{x_0}{\gamma}$ ,  $\frac{y_0}{\gamma}$  gan-  
ze rationale Zahlen sein, d. h. auch  
 $\frac{\xi' \xi}{\xi}$  oder  $\frac{\xi'}{\xi}$  liegt in dem Gitter  $\mathcal{G}'\mathcal{G}$ .

#### 4. Eindeutige Zerlegung in Prim- punkte.

Wir können jetzt dazu übergehen,  
unsere Betrachtungen über die Lit-  
terpunkte zu krönen, indem wir  
folgendes Fundamentalsatztheorem  
beweisen:

Sofern wir von der willkürli-  
chen Wahl hinzutreten der Ein-

Zeitpunkte absehen, lässt sich irgend ein Gitterpunkt unserer Normalfigur nur auf eine bestimmte Weise in Primpunkte zerlegen.

Den Beweis dieses Satzes führen wir in derselben Weise, wie es in der elementaren Zahlentheorie geschieht. Hier stützt man sich auf den Algorithmus der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzer Zahlen. Dementsprechend wollen wir uns auch hier fragen: Wie finden wir den grössten gemeinsamen Theiler zweier beliebig gegebener Gitterzahlen  $\xi$  und  $\xi'$ ?

Dabei wollen wir an die hergebrachte Terminologie anknüpfen. Diese ist nur vom Standpunkte der historischen Entwicklung aus zu verstehen. Ursprünglich beschäftigte man sich ausschliesslich mit den Zahlen des Hauptgitters, um so mehr, als diese in den einfachsten Fällen  $d = -3$  und  $d = -4$  zugleich die allgemein.

sten Gitterzahlen darstellen. Diese Zahlen nannte man wirkliche Zahlen. Bei der Behandlung der höheren Fälle zeigte sich aber, dass man mit diesen Zahlen nicht auskommt, sondern auch die Zahlen der Nebengitter hinzunehmen muss, wenn man die eindeutige Zerlegbarkeit in Primfactoren aufrecht erhalten will; diese Nebengitterzahlen nannte man im Gegensatz ideale Zahlen.

Eine neue Auffassung wurde in diesen Theil der Zahlentheorie durch Dedekind hineingetragen. Dedekind bemerkte, dass man die Betrachtung dennoch auf das Hauptgitter beschränken kann, dass man nämlich jeder Neben Zahl sozusagen ein Bildgitter entsprechen lassen kann, welches in dem Hauptgitter enthalten ist. Dieses Bildgitter erzeugen wir auf folgende Weise. Wir multipliciren die Neben Zahl  $\xi$  mit allen Zahlen des conjugir-

ten Gitters. Dadurch erhalten wir nach Satz 109 § 18<sup>2</sup> die Eckpunkte eines Gitters, welches dem Hauptgitter eingelagert ist. Wir bemerken, daß dasselbe dem eben benutzten conjugirten Gitter ähnlich ist, es entsteht nämlich dadurch, daß wir jenes in einem bestimmten Verhältnisse vergrößern und um einen gewissen (durch den Azimuthfactor von  $\xi$  gegebenen) Winkel verdrehen.

Der Inbegriff der  $\xi$ -Coordinaten dieses Gitters nennt Dedekind ein „Ideal“.

Diese Terminologie drückt eigentlich, dem Wortlaute nach, das Umgekehrte aus von dem, was sie ausdrücken sollte. Wenn man sich überhaupt auf den Standpunkt stellen will, daß die Thalen des Hauptgitters allein wirklich, die der Nebengitter ideal sind, so müßte man doch unser Bildgitter, welches die ideale Thale realisiren soll und welches ganz aus „wirklichen Thalen“



besteht, eher ein „Real“ nennen. Dieser Widerspruch zwischen Ausdruck und Sinn wird besonders fühlbar, wenn diese Zahl  $\xi$  im Besonderen eine Hauptzahl ist. Man wird der Gleichförmigkeit wegen auch diesen Zahlen ein Bildgitter entsprechen lassen. Wir haben dann ein reales Gegenbild einer schon an sich realen Grösse. Trotzdem wird ein solches Gitter „Hauptideal“ genannt, wodurch der Anschein erweckt wird, als ob ein solches Gitter besonders wenig real wäre.

Wie dem auch sei, jedenfalls werden wir die Terminologie und noch in höherem Masse den Gedankengang der Dedekind'schen Theorie für unsere Zwecke verwenden. Um dem Dedekind'schen „Ideal“ näher zu kommen, können wir für „Bildgitter“ etwa Idealgitter sagen.

Das Erste, was wir jetzt näher zu untersuchen haben, ist die Beziehung zwischen den Gitterzahlen und Idealgittern.

Wir werfen in dieser Hinsicht  
zwei Fragen auf:

1. Ist durch ein gegebenes Idealgitter eine zugehörige Gitterzahl bestimmt?

2. Ist durch eine gegebene Gitterzahl ein zugehöriges Idealgitter bestimmt?

Ad 1. Die Antwort auf die erste Frage lautet, daß das Idealgitter nicht völlig eine bestimmte Gitterzahl charakterisirt, daß nämlich alle nur durch Einheiten verschiedenen Punkte unserer Figur als Idealgitter dasselbe Idealgitter liefern.

Sei nämlich  $\mathcal{I}$  ein Idealgitter, dem die Gitterzahl  $\xi$  entspricht, so daß

$\mathcal{I} = \xi \cdot \mathcal{G}$   
ist, wo  $\mathcal{G}$  ein Gitter unserer Normalfigur bedeutet.

Wir fragen, giebt es noch eine andere Gitterzahl  $\xi'$  derart, daß auch

$$\mathcal{I} = \xi' \cdot \mathcal{G}'$$

ist, wo  $G'$  wiederum ein Gitter unserer Normalfigur bedeutet.

Hier können wir nun zunächst behaupten, daß die Gitter  $G$  und  $G'$  identisch sein müssen. Da sie nämlich durch Multiplication mit  $\xi$ , resp.  $\xi'$  d. h. durch Anwendung von Ähnlichkeitstransformationen, in dasselbe Gitter  $F$  übergehen, so müssen sie jedenfalls ähnlich sein. Da aber beide unserer Normalfigur angehören sollen, müssen auch die Inhalte ihrer Fundamentalparallelogramme gleich sein, d. h. sie müssen überhaupt identisch sein.

Die beiden Ausdrücke

$$\xi G \text{ und } \xi' G$$

stellen nun dasselbe Gitter dar, es muß daher der eine aus dem anderen durch eine Automorphie, d. h. Multiplication mit einer Einheit  $\varepsilon$  hervorgehen, d. h. es muß

$$\xi' G = \varepsilon \xi G \text{ sein, oder } \xi' = \varepsilon \xi .$$

Dies Resultat können wir so in Worte fassen:

Durch ein gegebenes Idealgitter ist die Gitterzahl  $\xi$  nur bis auf hinzutretende Einheitsfactoren bestimmt.

Ald 2. Unsere zweite Frage müssen wir bejahen. Wir werden nämlich sogleich für das zu einer Gitterzahl gehörige Idealgitter eine Eigenschaft kennen lernen, vermöge deren dasselbe unzweideutig festgelegt ist. Die bisherige Definition des Ideals ist insofern nicht ohne Weiteres eindeutig, als es ja vorkommen könnte, dass in unserer Normalfigur der durch das Ideal abzuhilfende Gitterpunkt mehreren unserer  $h$  Gitter gleichzeitig angehörte. Je nachdem wir ihn dann dem einen oder anderen dieser Gitter zuzählten, würden wir bei der Bildung des Ideals zu verschiedenen Ausdrücken

geführt werden.

Die Eigenschaft des Idealgitters, um welche es sich handeln soll, ist folgende: Das nach unseren früheren Regeln zu einem Gitterpunkte  $\xi$  hinzuconstruirte Idealgitter ist der Inbegriff aller durch  $\xi$  theilbaren Hauptzahlen.

Beweis: Erstens ist jede Zahl des Idealgitters eine durch  $\xi$  theilbare Hauptzahl.

Umgekehrt: Ist eine beliebige Hauptzahl  $w$  durch  $\xi$  theilbar und  $\xi$  in dem Gitter  $G$  enthalten, so ist  $\frac{w}{\xi}$  nach Satz pag 178 in dem Gitter  $H \cdot G$  oder  $G$  gelegen, wo  $G$  das zu  $G$  conjugirte Gitter bedeutet, d. h.  $w$  wird erzeugt durch Multiplication von  $\xi$  mit einer Zahl des conjugirten Gitters, was wir eben behauptet haben.

Nehmen wir nun an, es gäbe zu einem Gitterpunkte zwei verschiedene Ideale! Wir erkennen sofort, dass diese Annahme

absurd ist; denn beide als verschiedene vorausgesetzte Idealgitter müssen mit dem Anbegriff der durch unsere Gitterzahl theilbaren Hauptzahlen zusammenfallen. Hithin geht es zu jedem Gitterpunkte unserer Figur nur ein bestimmtes Idealgitter.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist ersichtlich die, dass keine zwei Gitter unserer Figur (vom Anfangspunkte abgesehen) einen Punkt gemein haben können.

Wäre dieses nämlich der Fall, ordnen wir zu dem betr. Punkte zwei verschiedene Bildgitter hinzuconstruiren, indem wir ihn mit den Punkten der beiden Gitter multipliciren, welche mit den Gittern, denen er selbst angehört, conjugirt sind.

Der letzte Satz ist für die Auffassung unserer Normalfigur natürlich von grosser Wichtigkeit. Die Uebersichtlichkeit dieses an

sich etwas complicirten geometrischen Gebildes wird durch ihn erheblich gesteigert - oder vielmehr, sie würde völlig verloren gehen, wenn der Satz nicht bestünde.

Wir schreiten nun zu einer neuen Definition der Idealgitter, die wir als die Dedekind'sche bezeichnen, da sie von diesem herrührt.

Außer den Idealgittern sind dem Hauptgitter viele andere Gitter eingelagert. Ein solches dem Hauptgitter eingelagertes Gitter nennt nun Dedekind ein Ideal, wenn es die folgende Eigenschaft besitzt:

Ein beliebiger Punkt des Gitters giebt, multiplicirt mit einem beliebigen Punkte des Hauptgitters, wieder einen Punkt des Gitters.

Hier bietet sich uns die Aufgabe, die Beziehungen zwischen unserer und der Dedekind'schen Definition aufzusuchen, eventuell die Identität beider Definitionen nachzuweisen. Die Untersuchung wird sich mit der

Beantwortung der folgenden beiden Fragen zu befassen haben:

1. Ist ein Idealgitter in unserem Sinne stets ein Dedekind'sches Ideal?

2. Ist ein Dedekind'sches Ideal stets ein Idealgitter in unserem Sinne?

Ad 1. Die Antwort auf die erste Frage ist leicht mit ja zu geben, wie sofort daraus folgt, daß unsere Idealgitter der Inbegriff der durch eine feste Zahl theilbaren Hauptzahlen sind. Greifen wir nämlich einen beliebigen Punkt des Idealgitters heraus, so ist dieser gleich dem Produkte von einer bestimmten Zahl  $\xi$  mit einer Zahl des zu dem Gitter von  $\xi$  conjugirten Gitters. Multipliciren wir dieses Produkt mit einer Hauptzahl, so ergibt sich eine Zahl, welche nach unseren früheren Sätzen über Gittercomposition aufgefaßt werden kann als Produkt derselben Zahl  $\xi$  mit einer gewissen Zahl desselben zu  $\xi$  conjugirten Gitters. Die



ses Product kommt aber nach Definition unter den Punkten des Idealgitters vor.

Ad 2. Die zweite Frage müssen wir ebenfalls mit ja beantworten, wie wir jetzt nachweisen wollen.

Wählen wir einen Basispunkt des vorliegenden Gitters auf der  $u$ -Achse, was stets möglich ist, so können wir dasselbe schreiben:

$$G = ax + \left(m + n \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y,$$

wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Fall  $d \equiv 0 \pmod{4}$  beschränken.  $a, m, n$  bedeuten hier ganze rationale Zahlen.

Nach Voraussetzung soll nun  $G$  die Eigenschaft haben, daß, wenn man eine beliebige Zahl aus  $G$  mit einer beliebigen Hauptzahl multipliziert, wieder eine Zahl aus  $G$  herauskommt. Wir machen deshalb den Ansatz:

$$\left[ax + \left(m + n \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y\right] \left[x' + \frac{\sqrt{d}}{2} y'\right] = ax' + \left(m + n \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y'$$

192.

Hier müssen sich für alle ganzzahligen Werthe von  $x, y, x', y'$  auch ganzzahlige Werthe  $x'', y''$  ergeben, d. h. die bilinearen Ausdrücke, welche  $x''$  und  $y''$  als Functionen von  $x, y \mid x', y'$  darstellen, müssen ganzzahlige Coefficienten haben. Diese lauten aber:

$$x'' = x x' - \frac{m}{n} x y' - \frac{m^2 - n^2 \frac{d}{4}}{a n} y y'$$

$$y'' = \frac{a}{n} x y' + y x' + \frac{m}{n} y y'$$

Aus der zweiten Zeile folgt, dass  $a$  und  $m$  durch  $n$  theilbar sein müssen d. h. alle Zahlen des Gitters  $\mathcal{G}$  sind durch die ganze rationale Zahl  $n$  theilbar; wir betrachten deshalb zunächst das einfachere Gitter:

$$\frac{\mathcal{G}}{n} = \frac{a}{n} x + \left( \frac{m}{n} + \frac{\sqrt{d}}{2} \right) y,$$

das wir der Kürze halber wieder schreiben:

$$a x + \left( m + \frac{\sqrt{d}}{2} \right) y.$$

Die zugehörige Form lautet:

$$a^2 x^2 + 2 a m x y + \left( m^2 - \frac{d}{4} \right) y^2.$$

Aus den Formeln 1., die für unseren jetzigen Fall Geltung haben, wenn wir  $n = 1$  setzen, folgt nun, dass  $m^2 - \frac{d}{4}$  durch  $a$  theilbar sein muss. Die zum Gitter gehörige Form können wir daher auch schreiben:

$$a(ax^2 + 2mx + \frac{m^2 - \frac{d}{4}}{a}y^2) = a(ax^2 + bxy + cy^2).$$

Die in Klammern stehende Form ist nun eine Stammform, weil sie die Discriminante  $d$  besitzt; wir können deshalb setzen:

$$ax + (m + \frac{\sqrt{d}}{2})y = \xi \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\xi} (\sqrt{a}x + \frac{-b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y)$$

d. h. das Gitter  $ax + (m + \frac{\sqrt{d}}{2})y$  ist das Bildgitter der Gitterzahl  $\xi \sqrt{a}$  und daher das ursprüngliche Gitter  $\xi$  das Bildgitter der Gitterzahl  $n \cdot \xi \sqrt{a}$ , womit die Richtigkeit unserer Behauptung dargethan ist.

Wir wollen jetzt noch eine Korallgemeinerung der gesammten Formeltheorie kurz besprechen, welche uns durch die Normalfigur nahe gelegt wird. Da wir in dieser im.

Haupt- und Nebengitter gleichzeitig und gleichberechtigt vor Augen haben, so werden wir es als eine Willkür bezeichnen, daß wir die Untersuchung der idealen Faktoren durchaus auf das Hauptgitter warfen. Es zeigt sich nämlich, daß wir das Hauptgitter ebenso gut durch ein beliebiges, aber festes Nebengitter ersetzen können, welches wir sozusagen zum Bildträger für die den übrigen Punkten unserer Normalfigur zuzuordnenden Bildgitter machen.

Wir verfahren folgendermassen: Sei  $G'$  das ausgezeichnete beliebige Gitter, welches wir zum Bildträger machen wollen,  $G$  dasjenige Gitter, in welchem der abzubildende Punkt liegt. Nunächst suchen wir das Gitter  $G''$  auf, welches mit  $G$  komponiert das Gitter  $G'$  ergibt, so daß also

$$G \cdot G'' = G' \text{ ist.}$$

195.

Um das Bildgitter der zu  $G$  gehörigen Litterzahl

$$\wp(\sqrt{a}x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y_0)$$

zu entwerfen, multipliciren wir diese mit allen Litterzahlen von  $G'$ , nämlich mit

$$\wp''(\sqrt{a}'x + \frac{b'+\sqrt{d}'}{2\sqrt{a}'}y).$$

Das so entstehende Litter

$$\wp\wp''(\sqrt{a}x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}y_0)(\sqrt{a}'x + \frac{b'+\sqrt{d}'}{2\sqrt{a}'}y)$$

ist nach der Compositionstheorie dem Litter  $G'$  eingelagert und liefert ein Bild des dem Litter  $G$  angehörigen Punktes. Wir werden dieses Bildgitter ein Nebengitterideal nennen. Wir sagen also:

Jedem Litterpunkte unserer Normalfigur kann nicht nur im Hauptgitter ein Ideal entsprechend gesetzt werden, sondern auch in jedem fest verabredeten Nebengitter  $G'$ .

Diese neue Begriffsbildung wird

uns in der Theorie der singulären  $\mathbb{K}o_2$ -  
dullen sehr nützlich sein, da sie der  
Gleichberechtigung der verschiedenen  
Wurzeln der Modulargleichung von  
vornherein Rechnung trägt.

Wollen wir das Nebengitterideal  
in Dedekind'scher Weise definieren,  
so constatiren wir zunächst die  
selbstverständliche Thatsache, daß  
die Ideale desselben ein Gitter  
bilden, d. h. sich durch Addition  
und Subtraction reproduciren.  
Ferner aber: Multipliciren wir die  
Ideale dieses Systems mit einer  
beliebigen Hauptzahl  $\alpha$ , so er-  
geben sich Ideale, welche dem-  
selben System angehören. In  
der That sind die Ideale  $\mathfrak{G}'\alpha$   
wieder Ideale des Gitters  $\mathfrak{G}'$ ,  
daher gehören auch die Ideale  
 $\xi \cdot \mathfrak{G}'\alpha$  dem ursprünglichen, in  
 $\mathfrak{G}'$  gelegenen Bildgitter an.

Wiederum können wir den Satz  
umkehren, wo er dann lautet:  
Befindet sich in einem festen

197.

Gitter  $\mathcal{G}'$  ein eingelagertes Gitter welches die Eigenschaft hat, daß seine Punkte, multipliziert mit beliebigen Punkten des Hauptgitters, wieder ihm angehörige Punkte ergeben, so ist dieses eingelagerte Gitter ein zu dem Gitter  $\mathcal{G}'$  gehöriges Nebenideal.

Den Beweis führen wir auf den entsprechenden Satz für die Hauptgitterideale zurück. Ist

$$\xi_1 x + \xi_2 y$$

ein dem festen Gitter  $\mathcal{G}'$  eingelagertes Gitter mit der vorausgesetzten Eigenschaft, und componiren wir dasselbe mit dem zu  $\mathcal{G}'$  conjugirten Gitter  $\mathcal{G}'$ , so ergibt sich offenbar ein dem Hauptgitter eingelagertes Gitter:

$$(\xi_1 x + \xi_2 y) \cdot \mathcal{G}' = w_1 x + w_2 y,$$

das ebenfalls die Eigenschaften eines Dedekind'schen Ideals besitzt. Entspricht ihm der ideale

Factor  $\xi$  aus dem Gitter  $\mathcal{G}$ , so ist

$$\omega_1 x + \omega_2 y = \xi \cdot \bar{\mathcal{G}},$$

wo  $\bar{\mathcal{G}}$  das zu  $\mathcal{G}$  conjugirte Gitter bedeutet. Aus den hingschriebenen Gleichungen folgt nun:

$$\xi_1 x + \xi_2 y = \mathcal{G}(\omega_1 x + \omega_2 y) = \xi \mathcal{G}' \bar{\mathcal{G}} = \xi \mathcal{G},$$

d. h.  $\xi$  ist auch der zu  $\xi_1 x + \xi_2 y$  gehörige ideale Factor und daher  $\xi_1 x + \xi_2 y$  ein Nebengitterideal in unserem Sinne.

Wir gehen jetzt auf das Entsprechende zwischen Idealen und idealen Factoren näher ein und beweisen dies bezüglich den folgenden grundlegenden Satz, der uns zeigt das hinsichtlich der Theilbarkeit Ideal und idealen Factor völlig äquivalent sind:

Sind alle Zahlen eines Idealgitters (mag es nun im Hauptgitter oder in einem festen Nebengitter liegen) durch eine ganze algebraische Zahl theilbar, so ist auch



der zugehörige ideale Factor durch dieselbe theilbar.

Beweis: Bezeichnen wir das Ideal mit  $\xi$ .  $\xi$  und sind alle Zahlen des selben durch die ganze algebraische Zahl  $\eta$  theilbar, so sind alle Zahlen des Ideals  $\xi^h \xi^h$  oder  $\xi^h \eta^h$  durch  $\eta^h$  theilbar. Da nun in  $H$  die 1 enthalten ist, muß  $\xi^h$  durch  $\eta^h$  theilbar sein, oder  $(\frac{\xi}{\eta})^h$  eine ganze algebraische Zahl. Ist aber  $(\frac{\xi}{\eta})^h$  eine ganze algebraische Zahl, so ist es auch  $\frac{\xi}{\eta}$ . Demgemäß  $(\frac{\xi}{\eta})^h$  etwa der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

wo  $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  ganze rationale Zahlen bedeuten, so genügt  $\frac{\xi}{\eta}$  der Gleichung

$$x^{nh} + a_1 x^{(n-1)h} + \dots + a_{n-1} x^h + a_n = 0,$$

ist also ebenfalls eine ganze algebraische Zahl.

Wir fügen dem vorstehenden Theorem noch den folgenden Licht

einzuwickelnden Satz hinzu:

Die Faktoren eines Stammgitters (mag es nun das Haupt- oder ein Nebengitter sein) besitzen in ihrer Gesamtheit keinen gemeinsamen Theiler.

Besäßen dieselben nämlich einen gemeinsamen Theiler, so müßte die zum Gitter gehörige Form offenbar imprimitiv sein, was bei einer Stammform nicht möglich ist.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu unserer Hauptaufgabe. Als solche haben wir pag. 180 bezeichnet: Einem dem Euklidischen analogen Algorithmus zu finden, welcher zur Auffindung des größten gemeinsamen Theilers zweier Gitterzahlen  $\xi$  und  $\xi'$  führt. Die Gitterzahlen können dabei Haupt- oder Nebenzahlen sein, zugleich oder zu verschiedenen Gittern gehören.

Unser Verfahren, welches, wie wir sehen werden, dem Verfahren der gewöhnlichen Zahlentheorie

genau nachgebildet ist, soll in Folgendem bestehen. Wir bilden zu beiden Zahlen die zugehörigen Idealgitter:

$$\xi \cdot \mathcal{G} \text{ und } \xi' \cdot \mathcal{G}'$$

Wir fügen diese Gitter in der Weise zusammen, daß wir zu jeder Zahl des einen jede Zahl des anderen Gitters addieren, d. h. wir addieren die beiden Gitter. Die entstehende Summe ist wieder ein Gitter und zwar ein Idealgitter, weil es die Dedekinds'schen Definitionsbedingungen befriedigt. Es muß daher zu ihm ein idealer Factor  $\tau$  gehören, nach dessen Abspaltung noch das Stammgitter übrig bleiben möge, so daß wir haben:

$$\xi \cdot \mathcal{G} + \xi' \cdot \mathcal{G}' = \tau \cdot \mathcal{T}$$

Wir behaupten nun, daß  $\tau$  der gesuchte grösste gemeinsame Theiler von  $\xi$  und  $\xi'$  ist. Dem

ben in arithmetische Form zu setzen. Das Princip wird dabei folgendes sein: Zu jedem der beiden Ideale  $\xi$   $\mathfrak{G}$  und  $\xi'$   $\mathfrak{G}'$  gehören zwei Basiszahlen.

Durch passende Zusammenfügung der letzteren wird man die Basiszahlen des durch Summation entstehenden Ideales berechnen. Aus dem letzteren bestimmt sich aber leicht der zugehörige ideale Factor.

Wir erkennen nun auch deutlich den eigentlichen Grund, welcher zu der Einführung der Ideale in diese Betrachtung zwingt. Dieser besteht darin, daß man zur Uebertragung des Euklidischen Algorithmus die Addition der Litterzahlen nöthig hat. Diese können wir aber bei zwei beliebigen Litterzahlen, sofern dieselbe verschiedenen Littern angehören, nicht ausführen, ohne aus unserer Normalfigur herauzutreten. Es ist nöthig, die Zahlen vorerst commensurabel zu machen, beispielsweise dadurch,

dass man ihnen je ein Zahlensystem des Hauptgitters zuordnet. Die so entstehenden Bilder kann man dann nach Belieben durch Addition combiniren.

Gleichzeitig bemerken wir nochmals, dass die Auszeichnung des Hauptgitters hierbei unwesentlich ist. Wir können die Bilder der Gitterzahlen ebenso gut in einem beliebigen, aber festen anderen Gitter construiren, weil auch diese die Addition zu lassen.

Wir möchten hier noch ausdrücklich der in den Büchern häufig ausgesprochenen Ansicht entgegen treten, wonach es im Gebiete der complexen algebraischen Zahlen keinen dem gewöhnlichen analogen Algorithmus des grössten gemeinsamen Theilers gebe. Diese Ansicht ist nur berechtigt, wenn man sich auf den speciellen Standpunkt stellen will, dass allein die Zahlen des Hauptgitters als Material gegeben sind. Dem

gegenüber sahen wir, daß, bei gleichmässi-  
ger Berücksichtigung der  $k$ -  
benigitter, der elementare Process  
in passender Verallgemeinerung  
genau aufrecht erhalten werden  
kann.

Auf Grund unseres Processes  
können wir nun alle diejenigen  
Schlüsse, welche man an densel-  
ben in der gewöhnlichen Zahlen-  
theorie knüpft, genau wiederholen  
und kommen dabei zu entspre-  
chenden Resultaten.

Wir haben uns vor allen Dingen  
zu überlegen, daß überhaupt noth-  
wendigerweise Primzahlen existiren.  
Der Grund ist, daß die Factorzer-  
legung einer vorgelegten Gitterzahl,  
von der Abspaltung von Einheiten  
abgesehen, nicht in's Unendliche  
weiter gehen kann. Denn zu den  
Factoren müssen ganzzahlige Werthe  
von  $f$  gehören, welche den zur gege-  
benen Gitterzahl gehörigen ganze-  
eigen Werth von  $f$  theilen.

Ferner aber handelt es sich um den Satz, dass eine beliebige Zahl sich auf eine und nur auf eine Weise in ein Produkt von Primzahlen zerlegen lasse.

Der Hauptpunkt beim Beweise desselben bildet, wie bekannt, schon in der gewöhnlichen Zahlentheorie das folgende Lemma:

Wenn das Produkt zweier Zahlen durch eine Primzahl theilbar ist, so wird notwendiger Weise eine der beiden Zahlen durch die Primzahl getheilt.

Dieses Lemma wollen wir hier für unser Zahlengebiet in Kürze beweisen, während wir die übrigen Theile des Beweises überspringen können, da sie aus der gewöhnlichen Zahlentheorie unmittelbar herübergenommen werden können.

Seien also  $\alpha$  und  $\beta$  zwei Litteralzahlen, von denen bekannt ist, dass ihr Produkt  $\alpha\beta$  durch eine Primzahl  $\pi$  theilbar ist. Wir

nehmen an, dass etwa  $\alpha$  durch  $\pi$  nicht theilbar sei. Dann ist der grösste gemeinsame Theiler von  $\alpha$  und  $\pi$  die Einheit. Bilden wir nun die zu  $\alpha$  und  $\pi$  gehörigen Idealgitter, so erhalten wir durch Summation ein neues Ideal, welches zu dem Factor 1 gehört, also das ganze Hauptgitter ausmacht. In diesem muss insbesondere der Einheitspunkt  $(1, 1)$  selbst enthalten sein. Hithin haben wir die Gleichung:

$$\alpha A + \pi \pi = 1,$$

unter  $A$  und  $\pi$  geeignet gewählte Zahlen aus den zu  $\alpha$  und  $\pi$  conjugirten Gittern verstanden. Diese Gleichung multipliciren wir beiderseits mit  $\beta$ . Es ist aber in der Gleichung

$$\alpha \beta A + \beta \pi \pi = \beta$$

die linke Seite nach Voraussetzung durch  $\pi$  theilbar. Also ist es auch



die rechte. Wir sehen also, daß von den beiden Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  notwendig eine durch  $\pi$  theilbar ist.

Von hier aus folgt der Beweis des Fundamentalsatzes über die eindeutige Zerlegbarkeit eines jeden Gitterpunktes in Primpunkte in bekannter Weise von selbst.

Wir schliessen unsere Darstellung der für unser Zahlengebiet geltenden Theilbarkeitsverhältnisse damit, daß wir eine Aufzählung sämtlicher in unserem Zahlgebiete vorkommenden Primzahlen vornehmen.

1. Die Aufzählung wird durch den folgenden Satz erleichtert.

Man erhält alle Primpunkte unserer Figur, wenn man zusieht, in welche Faktoren sich die auf der horizontalen Geraden des Hauptgitters gelegenen Punkte  $(\pi, \rho)$  zerlegen lassen, deren Coordinaten  $\rho$  Primzahlen im Sinne der gewöhnlichen Zahlentheorie sind.

En der That, sei  $(\pi, \bar{\rho})$  ein belie-

biger Primpunkt, welcher mit seinem conjugirten  $(\bar{\pi}, \pi)$  multiplicirt den rationalen Punkt  $(m, m)$  ergibt. Hier ist, wie wir behaupten,  $m$  eine gewöhnliche Primzahl  $p$  oder das Quadrat einer solchen. Denn

1. Kann  $m$  nicht durch 2 verschiedene rationale Primzahlen  $p$  und  $q$  theilbar sein. Wäre nämlich:

$$m = p \cdot q \cdot m', \text{ so hätten wir, da auch}$$

$$m = \pi \cdot \bar{\pi}$$

unter allen Umständen zwei verschiedene Zerlegungen von  $m$ , müßten nun  $p, q$  und  $m'$  noch weiter zerlegbar sein oder nicht.

2. Es muß also  $m$  die Potenz einer gewöhnlichen Primzahl sein:

$$m = p^{\lambda}$$

Hier kann nun  $\lambda$  höchstens gleich 2 sein, weil sonst offenbar  $m$  in mehr als 2 Primfactoren zerlegbar wäre, was der Gleichung  $m = \pi \cdot \bar{\pi}$  widerspricht.

Hiermit ist die Richtigkeit des angegebenen Satzes dargethan, aber implizite auch schon eine Eintheilung der aufzuzählenden Primzahlen gegeben. Wir werden dieselben nämlich in 2 Categorien eintheilen, je nachdem  $\lambda = 1$  oder  $\lambda = 2$  ist.

I)  $\lambda = 1$ . Es ist  $\pi \cdot \bar{\pi} = p$

Hier sind wieder noch 2 Fälle zu scheiden

a)  $\pi$  und  $\bar{\pi}$  verschieden

b)  $\pi = \bar{\pi}$  (natürlich bis auf Einheiten)

In beiden Fällen bleibt die gewöhnliche Primzahl  $p$  nicht mehr Primzahl in unserem Zahlensystem, sondern ist noch weiter in 2 Primfaktoren zerlegbar.

II)  $\lambda = 2$ ,  $\pi \cdot \bar{\pi} = p \cdot p$

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt:

$$\pi = \bar{\pi} = p.$$

In diesem Falle ist die gewöhnliche Primzahl  $p$  auch Primzahl in unserem erweiterten Zahlensystem.

2. Wir fragen nun weiter, wann die Fälle I & II eintreten werden. Dies. bezüglich haben wir den Doppelsatz:

Der Fall I tritt ein, d. h. die gewöhnliche Primzahl  $p$  ist in das Produkt zweier conjugirter Primfactoren spaltbar, wenn  $p$  durch eine quadratische Form der Discriminante  $d$  darstellbar ist.

Der Fall II tritt ein, d. h. die gewöhnliche Primzahl  $p$  ist nicht weiterzerlegbar, wenn  $p$  nicht durch eine quadr. Form der Discr.  $d$  darstellbar ist.

Der erste Theil dieses Satzes ist selbst verständlich, denn die Darstellung von  $p$  durch eine quadr. Form der Discriminante  $d$  gibt direct die beiden Primfactoren an, in die  $p$  zerlegbar ist.

Die Richtigkeit des zweiten Theiles ist leicht auf indirecte Weise zu schliessen. Angenommen  $p$  wäre nicht durch eine quadr. Form der Discriminante  $d$

darstellbar und doch zerlegbar,  
etwa

$p = \pi \cdot \bar{\pi}$ , so könnten wir setzen

$$\pi = \rho \left( \sqrt{a} x_0 + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} y_0 \right) \text{ und } \bar{\pi} = \frac{1}{\rho} \left( \sqrt{a} x_0 + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}} y_0 \right).$$

Hieraus würde folgen:

$$p = a x_0^2 + b x_0 y_0 + c y_0^2 \text{ und } b^2 - 4ac = d,$$

d. h.  $p$  wäre doch durch eine quadratische Form der Discriminante  $d$  darstellbar, was der Voraussetzung widerspricht. Es kann deshalb  $p$  in dem angenommenen Falle nicht weiter zerlegbar sein.

3. Bevor wir auch die Fälle Ia und Ib trennen, fügen wir noch folgenden Satz ein:

Lässt sich  $p$  durch eine Form der Discriminante  $d$  darstellen, so gibt es speziell auch eine solche Form, deren erster Coefficient  $p$  ist.

Es sei

$$p = a x_0^2 + b x_0 y_0 + c y_0^2,$$

wo  $x_0, y_0$  zwei ganze rationale

Zahlen bedeuten, die nothwendig  
theilerfremd sein müssen, da  $\rho$   
Primzahl sein soll. Wir wenden  
nun auf die Form  $ax^2 + bxy + cy^2$   
die Substitution:

$$\begin{aligned}x &= \alpha x' + \beta y' & \alpha\beta - \beta\alpha &= 1 \\y &= \gamma x' + \delta y'\end{aligned}$$

an.

Hierdurch entstehe die Form

$$a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2.$$

In unserer linearen Substitution  
können wir die Coefficienten  $\alpha$  und  
 $\gamma$  willkürlich wählen mit der al-  
leinigen Beschränkung, daß sie kei-  
nen gemeinsamen Theiler haben  
dürfen. Wie aus dem Anfang die-  
ser Vorlesung bekannt, lassen sich  
dann in der That stets correspon-  
dierende Werthe von  $\beta$  und  $\delta$  be-  
stimmen. Speciell wollen wir  
 $\alpha$  und  $\gamma$  gleich  $x_0$  und  $y_0$  nehmen.  
Dann gehört zu dem Wertepaare  
 $x' = 1, y' = 0$  das Wertepaar  $x = x_0,$

$y = y_0$ . Unsere Form  $(a', b', c')$  muß also für  $x' = 1, y' = 0$  den Werth  $p$  liefern, wir haben mithin:

$a' = p$ , was zu beweisen war.

4 Wir gehen jetzt dazu über, die Kriterien für die Fälle I a und I b anzugeben:

I a. Die Primzahl  $p$  ist in das Pro-  
dukt zweier verschiedener Primfak-  
toren zerlegbar, wenn  $p$  nicht in  
 $d$  aufgeht (und wenn, wie bereits  
angegeben wurde,  $p$  durch eine qua-  
dratische Form der Discriminante  
 $d$  darstellbar ist.)

I b. Die Primzahl  $p$  zerfällt in  
das Produkt zweier gleicher Primfak-  
toren  $p_0 \cdot p_0$ , wenn  $p$  in  $d$  aufgeht.

Die Beweise für diese Angaben liegen in den folgenden Ausführungen.

Hat  $d$  durch  $p$  theilbar, so ist auch der zweite Coefficient der Form  $(p, b', c')$  durch  $p$  theilbar. Durch Reduktion kann man inen der beiden Fälle erreichen:  $b' = 0$  oder

$b' = p$ . In beiden Fällen ist die Form eine Ancepsform.

Sie lautet:

$$px^2 - \frac{d}{4p} y^2, \text{ beziehungsweise}$$

$$px^2 + px y + \frac{p^2 - d}{4p} y^2.$$

Auf Grund unserer Orientirung der Ancepsgitter ergibt sich die Zerlegung

$$p = \sqrt{p} \cdot \sqrt{p},$$

$p$  erscheint also als das Quadrat einer sich selbst conjugirten Primzahl.

Geht  $p$  nicht in  $d$  auf, so ist auch der zweite Coefficient von  $(p, b', c')$  nicht durch  $p$  theilbar. Wir erhalten daher hier eine Zerlegung:

$$p = \varrho \sqrt{p} \cdot \frac{1}{\varrho} \sqrt{p}, \text{ wo } \varrho \text{ von } 1 \text{ und einer Einheit verschieden ist.}$$

$p$  erscheint also als das Produkt zweier ungleicher Primzahlen.

5. Wir wollen jetzt die vorstehenden Kriterien noch etwas vereinfachen, indem wir die Darstellbar-



keit von  $p$  durch eine quadratische Form der Discriminante  $d$  auf das Legendre'sche Symbol  $(\frac{d}{p})$  zurückzuführen.

Ist nämlich  $p$  durch eine quadratische Form der Discriminante  $d$  darstellbar, so giebt es eine quadratische Form mit dem ersten Coefficienten  $p$ :

$$px^2 + bxy + cy^2, \text{ so dass} \\ b^2 - 4pc = d, \text{ also } b^2 \equiv d \pmod{4p} \\ \text{ist.}$$

Umgekehrt besteht die Congruenz  $b^2 \equiv d \pmod{4p}$ , so lässt sich stets  $p$  durch eine quadratische Form

$$px^2 + bxy + \frac{b^2 - d}{4p} y^2 \\ \text{mit der Discriminante } d \text{ darstellen.}$$

Für das Folgende haben wir jetzt die Fälle  $p = 2$  und  $p$  ungerade gesondert zu betrachten.

6. Wir untersuchen zunächst die Zerlegbarkeit von 2, betrachten also die Congruenz:

$$b^2 \equiv d \pmod{8}$$

Von Hause aus hat die Discriminante  $d$  eine der Formen:

$$85, 85+1, 85+4, 85+5.$$

Von diesen erledigen sich die Fälle  $d=85$  und  $d=85+4$  sofort; beide male ist nämlich  $d$  durch 2 theilbar; infolgedessen zerfällt 2 in die Primfactoren  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ .

Ist  $d=85+1$ , so ist die Congruenz  $b^2 \equiv d \pmod{8}$  lösbar, daher 2 durch eine quadratische Form der Discriminante  $d$  darstellbar und folglich in zwei verschiedene Primfactoren zerlegbar.

Ist  $d=85+5$ , so ist die obige Congruenz nicht lösbar, daher auch 2 nicht durch eine Form der Discriminante  $d$  darstellbar und infolgedessen unzerlegbar. Zusammenfassend haben wir:

$$d \equiv 0 \pmod{4} \dots 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$d = 85+1 \dots 2 \text{ zerfällt in das Pro-} \\ \text{duct zweier ver-} \\ \text{schiedener Primfactoren}$$

$$d = 85+5$$

2 ist unzerlegbar.

7. Wir betrachten jetzt den Fall, dass  $p$  eine ungerade Primzahl ist. In diesem Falle zieht die Lösbarkeit der Congruenz  $b^2 \equiv d \pmod{p}$  diejenige der Congruenz  $b^2 \equiv d \pmod{4p}$  stets nach sich. Wir können daher sofort das folgende Resultat hinschreiben:

$\left(\frac{d}{p}\right) = +1$ ;  $p$  zerfällt in das Produkt zweier verschied. Primfactoren

$\left(\frac{d}{p}\right) = 0$ ;  $p$  " " " " " " gleicher "  $\sqrt{d/p}$ .

$\left(\frac{d}{p}\right) = -1$ ;  $p$  ist unzerlegbar, also selbst Primzahl.

8. Wir wollen endlich bei einer beliebigen Zahl

$$n = p^k q^l \dots$$

fragen auf wieviel Arten dieselbe als Produkt zweier conjugirter Zahlen  $v$  und  $v'$  unseres Gebietes aufgefasst werden kann. Zu dem Zwecke zerlegen wir  $p, q, \dots$  sofern es angeht und ordnen die einzelnen Factoren  $\pi, \bar{\pi}$  auf alle Weisen zu conjugirten Produkten. Dies

ist eine rein combinatorische Aufgabe.

Bemerken wir noch, dass diese Frage übereinstimmt mit der Frage nach der Anzahl der Darstellungen, welche die Zahl  $n$  durch Formen unserer Discriminante  $\Delta$  lässt. In der That giebt jede solche Darstellung eine Zerlegung der Zahl  $n$  und umgekehrt.

Geometrisch bedeutet diese Anzahl die Zahl derjenigen Gitterpunkte, welche in der Normalfigur die Entfernung  $\sqrt{n}$  von  $O$  haben. Aus der vorstehenden Regel zur Berechnung jener Zahl ersieht man, dass sie bei einer grösseren Anzahl in  $n$  vorkommender Factoren sehr erheblich sein kann. Es giebt dann eine grosse Menge von Punkten, welche von  $O$  dieselbe Entfernung  $\sqrt{n}$  haben. Aber alle diese Punkte sind in unserer Normalfigur verschieden, weil sie sich eben aus verschiedenen Primpunkten aufbauen.

9. VII. 96. Hiermit schließen wir unsere Behandlung der Compositi-  
 onstheorie ab. Wir sollten diesel-  
 be eigentlich noch weiter führen,  
 indem wir sie von den Stamm-  
gittern (Discriminante  $d$ ), auf  
beliebige Zweiggitter (Discriminan-  
 te  $D = n^2 d$ ) ausdehnen. Diese  
 Verallgemeinerung bietet keine  
 principielle Schwierigkeiten,  
 muß aber hier der Kürze halber  
 übergangen werden. Trotzdem  
 werden wir die bisherigen Sätz-  
 e gelegentlich auch für Zweig-  
 gitter in Anspruch nehmen.

---

### III. Haupttheil.

## Theorie der singulären elliptischen Gebilde.

Wir legen eine ganzzahlige negative Discriminante zu Grunde und betrachten die zu dieser Discriminante gehörige Normalfigur, bestehend aus  $n$  Gittern in bestimmter Orientierung. Die hierdurch definirten Gitterzahlen sind gewöhnliche complexe Zahlen von der Form  $u + iv$ . Die Discriminante wollen wir bezeichnen mit  $D = -\Delta$ , (in dem wir uns das Zeichen  $\Delta$  für die Discriminante der elliptischen Functionen vorbehalten). Zu jedem dieser Gitter gehört ein gewisses elliptisches Gebilde. Dasselbe heisst singular, weil die aus den Perioden  $\omega_1, \omega_2$  (den Basiszahlen unseres Gitters) gebildete quadratische Form

$f = (w_1 x + w_2 y)(\bar{w}_1 x + \bar{w}_2 y) = ax^2 + bxy + cy^2$   
eine ganzzahlige Form ist.

Wir studieren die Besonderheiten dieser singulären Gebilde. Dieselben bestehen allgemein zu reden, darin, daß die Compositions-theorie auf sie Anwendung findet.

Speziell erinnern wir an den Lhering'schen Satz (vergl. pg. 145) wonach jedes unserer  $h$  Gitter (bez. elliptischer Gebilde) durch eine Anzahl erzeugender Gitter (Gebilde) dargestellt werden kann in der Form

$$G = T^{\alpha} T^{\alpha}, \dots$$

Um an diese bestimmte Art der Darstellung zu erinnern, schreiben wir statt  $G$ :  $G_{\alpha}$  (oder auch eventl.  $G^{(\alpha)}$ ). Die Thatsache der Gittercomposition drückt sich dann einfach durch die Formel aus

$$G_{\alpha} \cdot G_{\alpha'} = G_{\alpha + \alpha'}$$

Unter den Invarianten unserer elliptischen Gebilde werden wir dabei

nach den früheren Entwicklungen die folgenden berücksichtigen, die wir nach der Stufezahl bez. nach ihrem Grade in den Variablen  $w_1, w_2$  noch einmal tabellarisch zusammenstellen:

	Modulfunktionen (Grad = 0)	Modulformen (Grad $\neq 0$ )
1. Stufe	$j = 1728 \mathfrak{J}$	$g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ Grad -4, -6, -1
5. Stufe	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ Grad + 1.

Wir unterwerfen nun unsere Gebilde beliebigen Transformationen höherer Ordnung, suchen also zu den gegebenen Punktgittern neue auf, welche in jene eingelagert sind. Nun kennen wir für jedes unserer  $h$  Gitter eine besondere Kategorie von eingelagerten Gittern, nämlich die Idealgitter.

Die Besonderheit, welche unsere



singulären Gebilde gegenüber Trans-  
formationen höherer Ordnung dar-  
bieten, werden darin bestehen, daß  
unter den transformirten Gebilden  
diejenigen vorhanden sind, welche  
den Idealgittern entsprechen.

Aus dieser Bemerkung fließen  
 in der That höchst bemerkenswerthe  
 Consequenzen bezüglich der soeben  
 genannten Invarianten. Wir behan-  
 deln zunächst die Invarianten der  
 $n$ ten Stufe und unterwerfen diesel-  
 ben einer Transformation vom  
 Primzahlgrade  $p$  (wobei wir  $p \neq 2$   
 voraussetzen mögen).

Wir müssen unterscheiden, ob die  
 Zahl  $p$  in unserer Normalfigur  
 unzerlegbar ist, ob sie in das Pro-  
 dukt zweier gleicher oder zweier  
 verschiedener Factoren zerfällt.  
 Ueber den ersten Fall ist nichts  
 Besonderes zu bemerken, weil  
 sich hier die Transformations-  
 theorie der singulären Gebilde  
 ebenso gestaltet wie die der

nicht-singulären. Der zweite Fall tritt nur bei denjenigen Primzahlen auf, welche Theiler der Discriminante  $D$  sind, und soll zunächst zurückgeschoben werden.

Wir setzen demnach voraus, daß der dritte Fall vorliegt, daß wir also haben

$$p = \pi \cdot \bar{\pi}$$

wobei  $\pi$  und  $\bar{\pi}$  zwei verschiedene Primzahlen sind, welche bez. zu den Gittern  $G_p$  und  $G_{\bar{p}}$  gehören mögen.

Es handle sich um die Transformation des elliptischen Gebildes  $G_2$ , welches nach Belieben als zu dem Hauptgitter oder zu einem Nebengitter gehörig vorausgesetzt werden möge. Wir kennen von vornherein zwei dem Gitter  $G_2$  eingelagerte Gitter, nämlich die beiden (Haupt- oder Neben-) Idealgitter.

$$\pi \cdot G_{2-\beta}, \quad \bar{\pi} \cdot G_{2+\beta}.$$

In der That gehören alle Ecken

dieser beiden Gitter nach der Compositions-  
 theorie dem Gitter  $G_{\alpha\beta}$ .  
 Wir haben nämlich:

$$G_{\beta}: G_{\alpha-\beta} = G_{\alpha} \text{ bez. } G_{\beta}: G_{\alpha+\beta} = G_{\alpha}.$$

Die Perioden der durch unsere Ideal-  
 gitter definirten elliptischen Gebilde  
 sind ersichtlich, wenn wir mit  
 $\omega_1^{(\alpha-\beta)}$ ,  $\omega_2^{(\alpha-\beta)}$  etc. die Perioden  
 von  $G^{(\alpha-\beta)}$  etc. bezeichnen, die fol-  
 genden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi \cdot \omega_1^{(\alpha-\beta)} \\ \pi \cdot \omega_2^{(\alpha-\beta)} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi \cdot \omega_1^{(\alpha+\beta)} \\ \pi \cdot \omega_2^{(\alpha+\beta)} \end{array} \right\}.$$

Diese Perioden entstehen also aus  
den Perioden von  $G_{\alpha-\beta}$  und  $G_{\alpha+\beta}$   
durch Multiplication mit der com-  
plexen Grösse  $\pi$  oder  $\bar{\pi}$ , oder wie  
man kurz sagt, durch „complex  
Multiplication.“

Beiläufig bemerken wir, dass die  
 zu unsern beiden Idealgittern ge-  
 hörige quadratische Form die fol-  
 gende ist:

$$f = \pi \bar{\pi} (\omega_1^{(\alpha+\beta)} x + \omega_2^{(\alpha+\beta)} y) (\bar{\omega}_1^{(\alpha+\beta)} x + \bar{\omega}_2^{(\alpha+\beta)} y).$$

Sie entsteht also aus der zu  $\mathcal{G}_{\alpha+\beta}$  gehörigen Form durch Multiplication mit  $p$ ; sie ist imprimiter und hat die Discriminante  $p^2 D$ .

Hinsichtlich des Elementarparallelogramms der Idealgitter folgt hieraus: Dieses ist gleich  $p \sqrt{D}$ , also  $p$ -mal so gross wie das Elementarparallelogramm eines der gegebenen  $h$  Gitter.

In Folge dessen entstehen unsere Idealgitter aus dem Gitter  $\mathcal{G}_\alpha$  durch Transformation  $p^{\text{ter}}$  Ordnung. Nun wissen wir von früher her (vergl. pg 29), dass allgemein aus einem beliebigen Gitter durch Transformation  $p^{\text{ter}}$  Ordnung  $p+1$  neue grossmaschige Gitter entstehen, die dem gegebenen Gitter eingelegt sind.

Von diesen  $p+1$  Gittern sind in unserem Falle zwei von vornherein bekannt, nämlich unsere Idealgitter.

Wir haben damit den centralen

Satz in der Theorie der singulären elliptischen Gebilde bezeichnet. Eben  
wird zu, welche algebraischen Folge-  
rungen sich daraus ergeben.

Wir betrachten zunächst die Trans-  
formationsgleichung für die Inva-  
riante  $j$ :

$$F(j', \tau) = 0$$

und verstehen unter  $j$  die zum Gitter  $G_2$   
gehörige Invariante, die wir  $j_2$   
nennen. Die Invarianten der  
 $p+1$  transformierten Gitter  $j'$  wer-  
den durch die Wurzeln unserer Glei-  
chung bestimmt. Denken wir uns  
nun die Invarianten  $j_1, \dots, j_p$  ge-  
geben, welche zu den ursprünglichen  
Gittern unserer Normalfigur gehören,  
so sind von den  $p+1$  Wurzeln der  
Transformationsgleichung zwei  
bekannt, nämlich die Invarian-  
ten der Idealgitter. Da  $j$  nur von  
dem Brückenquotienten  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  ab-  
hängt und da die Perioden der  
Idealgitter aus denen von  $G_2 - \beta$

und  $G_{\alpha+\beta}$  durch complexe Multiplikation hervorgehen, so sind die Invarianten der Idealgitter mit den Invarianten  $f_{\alpha-\beta}$  und  $f_{\alpha+\beta}$  identisch. Es sind also in der That von den  $\rho+1$  Wurzeln zwei bekannt, nämlich

$$f' = f_{\alpha-\beta} \text{ und } f' = f_{\alpha+\beta}.$$

Der soeben abgeleitete Satz lässt eine wichtige Verwässerung zu, nämlich:

Die übrigen  $\rho-1$  Wurzeln der Transformationsgleichung sind von den singulären  $f_1, f_2, \dots, f_\rho$  verschieden.

Der Beweis für diese Behauptung ist sehr einfach. Soll  $f' = f_k$  sein, so muss das zu  $f'$  gehörige Gitter  $G'$  dem zu  $f_k$  gehörigen Stammgitter ähnlich sein, also

$$G' = \mu_{\alpha-k} G_k$$

Um die Natur der Zahl  $\mu_{\alpha-k}$  zu erkennen, komponire ich beiderseits mit  $G_{-k}$ , so dass sich ergibt:

$$G' G_{-k} = \mu_{\alpha-k} H.$$

Darum  $H$  die 1 enthält, muß  $\mu_{\alpha, \kappa}$  in dem Gitter  $G'_{\alpha, \kappa}$  vorkommen und auch, da  $G'$  in  $G_{\alpha}$  enthalten ist, in dem Gitter  $G_{\alpha}$ :  $G_{\alpha, \kappa} = G_{\alpha, \kappa}$ . Es ist also  $\mu_{\alpha, \kappa}$  eine Gitterzahl des Gitters  $G_{\alpha, \kappa}$ . Hieraus folgt, daß  $G'$  ein dem Gitter  $G_{\alpha}$  eingelagertes Idealgitter ist. Nun ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Faktorenzerlegung von  $p$ , daß es nur zwei in  $G_{\alpha}$  durch Transformation  $p$ -ter Ordnung eingelagerte Idealgitter giebt, nämlich

$$\pi \cdot G_{\alpha - \beta} \text{ und } \bar{\pi} \cdot G_{\alpha + \beta}.$$

Mit einem von diesen muß also  $G'$  nothwendig identisch sein, d. h. es ist  $f_{\kappa}$  entweder gleich  $f_{\alpha - \beta}$  oder gleich  $f_{\alpha + \beta}$ , wie wir behauptet haben.

Nehmen wir ferner die Multiplikatorgleichung:

$$\Phi(M, f) = 0.$$

Diese ist in  $M$  vom  $(p+1)$ -ten

Grade; ihre Coefficienten sind nach Adjunction der Grössen  $f_2, f_3$  (vergl. pg ) rational. Ihre Wurzeln bestimmen zu dem Gitter  $\mathcal{G}_a$  die Multiplikatoren der zugehörigen  $p+1$  transformirten Gitter. Denken wir uns die Werte der Discriminante  $\Delta$ , welche zu den ursprünglichen  $h$  Gittern gehören, gegeben, so sind wiederum zwei von den  $p+1$  Wurzeln der Multiplatorgleichung bekannt, nämlich die Multiplikatoren der Idealgitter. In der That werden die Discriminanten der Idealgitter

$$\Delta' = \Delta(\pi \omega_1^{(\alpha-\beta)}, \pi \omega_2^{(\alpha-\beta)}) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2\alpha} \Delta^{(\alpha-\beta)}$$

bezw.

$$\Delta' = \Delta(\bar{\pi} \omega_1^{(\alpha+\beta)}, \bar{\pi} \omega_2^{(\alpha+\beta)}) = \left(\frac{1}{\bar{\pi}}\right)^{2\alpha} \Delta^{(\alpha+\beta)}$$

mithin die zugehörigen Multiplikatoren:

$$M = \pi \sqrt{\frac{\Delta^{(\alpha-\beta)}}{\Delta^{(\alpha)}}} \quad \text{bez.} \quad M = \bar{\pi} \sqrt{\frac{\Delta^{(\alpha+\beta)}}{\Delta^{(\alpha)}}}$$



Diese von vornherein bekannten Grössen müssen sich unter den Wurzeln der Multipliegatorgleichung befinden. Allerdings bleibt hierbei noch unbestimmt und muss durch besondere Betrachtungen festgestellt werden, welcher von den zwölf Werten von  $K$ , die in den vorstehenden Ausdrücken enthalten sind, der Multipliegatorgleichung genügt. Hierüber entscheiden die von Hurwitz gegebenen Entwicklungen.

10. VII. 96. Die vorhergehenden allgemeinen Resultate sollen nun specialisirt werden.

Wir halten zunächst daran fest, dass  $p$  in zwei verschiedene Primfactoren  $\pi$  und  $\bar{\pi}$  zerfällt, setzen aber voraus, dass diese in ein und demselben Gitter, d. i. in einem Arbeitsgitter liegen. Dann ist also  $G_{\beta} = G_{-\beta}$  und  $G_{\alpha-\beta} = G_{\alpha+\beta}$ . Die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Transformationsgleichung werden in diesem Falle iden-

tisch; es ist  $f_{\alpha-\beta} = f_{\alpha+\beta}$ . Unsere Gleichung  $F(z; \mu) = 0$  erhält also eine Doppelwurzel, falls die beiden Factoren von  $p$  einem Ancepsgitter angehören.

Was die Multiplikatorgleichung betrifft, so wird hier  $\Delta_{\alpha+\beta} = \Delta_{\alpha-\beta}$ . Die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Multiplikatorgleichung werden also in dem vorausgesetzten Specialfall:

$$M = \pi \sqrt{\frac{\Delta_{\alpha \pm \beta}}{\Delta_{\alpha}}} \text{ bzw. } M = \pi \sqrt{\frac{\Delta_{\alpha \pm \beta}}{\Delta_{\alpha}}}$$

Wir wollen eine weitere vereinfachende Annahme hinzufügen. Die beiden (verschiedenen) Factoren  $\pi$  und  $\bar{\pi}$  sollen nicht einem Ancepsgitter schlechtweg, sondern speziell dem Hauptgitter angehören. Die Transformationsgleichung besitzt dann wie vorher eine Doppelwurzel; diese Doppelwurzel ist aber speziell gleich der Invariant des ursprünglichen Gitters

G<sub>2</sub>.

Wir haben

$$f' = f_{\alpha-\beta} = f_{\alpha+\beta} = f_{\alpha}.$$

Gleichzeitig verwenden die beiden  
ausgezeichneten Wurzeln der Mul-  
tiplicatorgleichung direct. gleich

$\pi$  und  $\bar{\pi}$

(ev. bis auf hinzutretende  $12^{\text{te}}$  &  
Einheitswurzeln).

Nachdem wir so den allgemei-  
nen Fall behandelt haben, wo  $p$   
in das Product zweier ungleicher  
Primfactoren zerfällt, mögen wir  
noch ein paar Worte über den be-  
sonderen Fall sagen, wo  $p$  gleich  
dem Quadrate eines sich selbst  
conjugirten Primfactores.

$$p = \pi^2$$

wird. Jetzt giebt es unter den durch  
Transformation  $p^{\text{ter}}$  Ordnung aus  
 $G_2$  entstehenden Gittern nur ein  
Eidealgitter. Daher ist von den

$p+1$  Wurzeln der Transformationsgleichung nur eine bekannt, nämlich

$$f' = f\alpha \pm \beta;$$

ebenso ist von den  $p+1$  Werten des Multiplikators nur einer von vornherein angebar, nämlich

$$16. \pi \sqrt{\frac{\Delta\alpha \pm \beta}{\Delta\alpha}}$$

Das Gitter  $G_\beta$ , welchem die Zahl  $\pi$  angehört, ist in diesem Falle (vergl. pag. 216) es ipso ein Uncepsgitter. Setzen wir dieses noch speciell als das Hauptgitter voraus, so ergeben sich ähnliche Vereinfachungen wie oben.

Hieran schließt sich leicht die Verallgemeinerung auf einen beliebigen Transformationsgrad. Sei der Transformationsgrad etwa

$$n = p^a q^b \dots$$

Wir zerlegen die Zahl  $n$  in ihre Primfactoren  $\pi, \bar{\pi}, k, \bar{k}$  etc. und

fassen diese auf alle Weisen in das Product zweier conjugirter Zahlen  $n = r \cdot \bar{r}$  zusammen, je der Factor  $r$  von  $n$  bestimmt nun ein Idealgitter, welches dem Gitter  $G_a$  durch Transformation  $n$ ter Ordnung eingelagert ist. Dementsprechend erhält die Transformationsgleichung bez. die Multiplikatorgleichung ebenso viele bekannte Wurzeln, als es unterschiedene Factoren von  $n$  giebt. Gehört etwa  $r$  zum Gitter  $G_\beta$ , so sind dieses die Wurzeln

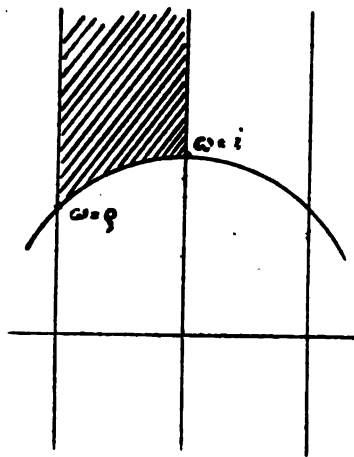
$$f' = f_{\alpha+\beta} \text{ bez. } h_\beta = r \sqrt{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha}}$$

Die Fruchtbarkeit dieser allgemeinen Sätze möge zunächst an einem speciellen Beispiele dargestellt werden.

Unter allen Discriminantenwerthen sind die einfachsten  $d = -3$  und  $d = -4$ .

Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß sie nur eine Klasse liefern. In unserer Dreiecksfigur entsprechen diesen Wörthen die Eckpunkte  $w = \rho$  und  $w = i$ . Es liegt nahe, auch die dritte Ecke des Fundamentaldreiecks heranzuziehen.

Diese liegt allerdings auf der Begrenzung der  $w$ -Halbebene und entspricht daher einer zerfallenden Form von der Discriminante  $d = 0$ . Von den beiden



Perioden  $w_1$  und  $w_2$  wird dann die eine unendlich gross. In Folge dessen artet unser parallelogrammatisches Gitter in ein Gitter aus Streifen aus. Wir kämen so von dem Fundamentalbereich der doppeltperiodischen Functionen zu dem der Exponentialfunction

und von der Theorie der singulären Moduln zu der Kreistheilungstheorie.

Es wäre außerordentlich interessant, die Theorie der Kreistheilungsgleichungen unter diesem Gesichtspunkte als Grenzfall der Gleichungen der Transformationstheorie zu behandeln.

Hier beschränken wir uns auf den Fall  $d = -3$ . In diesem Falle ist  $g_2 = 0$  und daher auch  $j = 0$ . Wir untersuchen also die Transformation desjenigen speciellen elliptischen Gebildes, für welches  $j_2 = 0$  ist. Es giebt für  $d = -3$  nur dieses eine elliptische Gebilde,  $h$  ist also = 1.

Das besondere Interesse dieses Gebildes liegt in der relativ geringen Anzahl der Einheiten. Für  $d = -3$  giebt es die folgenden sechs Einheiten

$$\pm 1, \pm \vartheta, \pm \vartheta^2,$$

wo

$$240.$$

$$\xi = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \xi' = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

ist. Die Existenz der Einheiten kommt darin zum Ausdruck, daß das Gitter ein gleichseitiges ist, daß es also bei einer Drehung um  $60^\circ$  mit sich zur Deckung kommt.

Wir haben nun die diesem Gitter eingelagerten Gitter zu betrachten. Die letzteren zerfallen in zwei Kategorien, je nachdem sie selbst bei einer Drehung um  $60^\circ$  mit sich zur Deckung kommen, oder nicht. Im ersten Falle sind sie ihrerseits gleichseitige Gitter, also dem ursprünglichen ähnlich. Nun entstehen aber die dem ursprünglich ähnlichen Gitter aus jenem durch gleichzeitige Multiplikation der Perioden mit einer Gitterzahl. Diese Gitter sind daher keine anderen als unsere Idealgitter. Was die andere



Kategorie der eingelagerten Gitter betrifft, so muß es zu jedem von ihnen zwei andere Gitter geben, in welche dasselbe successive bei der Drehung um  $60^\circ$  übergeführt wird. Die Gitter der zweiten Kategorie gehören also zu dreien zusammen und gehen bei den Automorphismen des Ausgangsgitters zyklisch in einander über.

Hierauf können wir sofort ein eigentümliches Verhalten der Transformationsgleichung vorhersehen. Setzen wir nämlich in  $F(x, y) = 0$  die Invariante  $y$  gleich Null, so werden sich je nach der Zerlegbarkeit der Zahl  $p$  im Körper  $\mathbb{F} - 3$  keine, eine oder zwei Wurzeln,  $x' = 0$ , abspalten. Die übrigen  $p$  Wurzeln aber müssen zu dreien einander gleich werden. Nur die erstere Thatsache gehört eigentlich in die Theorie der complexen Multiplication; die

Letztere folgt ihrerseits aus der Existenz der Einheiten. Unser Resultat folgt übrigens auch aus der Gestalt des zum Transformationsgrade  $p$  gehörigen Fundamentalpolygons; vergl. oben pag. 1.

Wir behandeln der Reihe nach die Primzahlen

$$p = 2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

Von diesen ist (nach pag. 219) 2, 5 und 11 unzerlegbar; die Zahl 3 geht in der Discriminante auf und wird daher gleich dem Quadrat eines Primfactors, multipliziert mit einer Einheit:

$$3 = -(\varrho - \varrho^2)^2.$$

Die Zahlen 7 und 13 sind zerlegbar; n. zw. bekommen wir aus einer Zerlegung noch zwei andere (in Wesentlichen allerdings identische) Zerlegungen durch Multiplication mit den (nicht trivialen) Einheiten  $\varrho$  und  $\varrho^2$ . So ergibt sich:

249.

$$\gamma = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5 - \sqrt{3}}{2}$$

und

$$\eta = (1 + 2\sqrt{3})(1 - 2\sqrt{3}) = \frac{\gamma + \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\gamma - \sqrt{3}}{2} = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5 - 3\sqrt{3}}{2}$$

(Dass wir die beiden Factoren immer noch simultan im Vorzeichen ändern können, entspricht der „trivialen“ Einheit - 1.)

Um die zugehörigen Transformationsgleichungen aufzustellen, benutzen wir am besten ein Verfahren, welches in Math. Ann. Bd. 14 pag. 143 angegeben ist. Schliessen wir den Fall 10. 11 aus, da uns wegen der Unzerlegbarkeit der Zahl  $\eta$  keine hin nicht interessiert, so wird in allen übrigen Fällen die Transformationsgleichung vom Grade Null, wie man aus der Betrachtung der Transformationspolygone in der  $w$ -Ebene folgern kann. Alsdann können wir  $F$  und  $F'$  als rationale Functionen eines geeigneten Parameters  $\tau$  bestimmen, der auf dem Polygon jeden Werth nur einmal annimmt;

oder auch, wir können  $\mathcal{F}$  als rationale Function von  $\tau$ ,  $\mathcal{F}'$  als rationale Function eines zweiten Parameters  $\tau'$  bestimmen und zwischen  $\tau$  und  $\tau'$  eine lineare Abhängigkeit festsetzen. An der genannten Stelle wird nun gemacht:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{F}: \mathcal{F} - 1 : 1 = \varrho(\tau) : \chi(\tau) : \psi(\tau) \\ \mathcal{F}': \mathcal{F}' - 1 : 1 = \varrho(\tau') : \chi(\tau') : \psi(\tau') \end{array} \right\} \tau\tau' = \text{const.}$$

Hier sind  $\varrho, \chi, \psi$  rationale Functionen  $(p+1)$ ten Grades. Die vorstehenden Gleichungen vertreten mit Vortheil die Transformationsgleichung  $\mathcal{F}(f', f) = 0$ , (sobald wir noch für  $\mathcal{F}$   $\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}'}$  einsetzen.)

Im Falle der Discriminante  $d = -3$  wird nun noch, wie erwähnt,  $f = 0$ . Dies gibt zur Bestimmung von  $\tau$  die Gleichung  $\varrho(\tau) = 0$ . Der correspondirende Werth von  $\tau'$  folgt dann aus  $\tau\tau' = \text{const}$  und der Werth der

transformierten Invariante  $j'$   
aus der Gleichung  $F' = \frac{\varphi(\tau')}{\psi(\tau')}$ .

Im Folgenden stellen wir die Gleichung  $\varphi(\tau) = 0$  für die Transformationsgrade 2, 3, 5 etc. zusammen und geben gleichzeitig den Zusammenhang der Grösse  $\tau$  mit dem Multiplikator, wie es ebenfalls in Bd. III aufgestellt wurde.

$n = 2$ . Die Gleichung für  $\tau$  lautet:

$$(4\tau - 1)^3 = 0.$$

Da 2 unzerlegbar, kommt die Idealtheorie bei dieser Transformation nicht weiter zur Geltung. Wohl aber sehen wir, dass die drei transformierten Gitter unter einander congruent werden. Der Uebergang zu  $\tau$  wird vermittelt durch

$$\tau\tau' = 1,$$

der Uebergang zu  $\mathcal{N}$  durch

$$\tau = \frac{1}{\mathcal{N}^2}$$

$n = 3$ . In diesem Falle geht der Transformationsgrad in der Discriminante auf; es spaltet sich

daher eine Wurzel der Gleichung  $\varphi(\tau) = 0$  ab; die drei übrigen werden einander gleich. Wir haben in der That

$$\varphi(\tau) = (\tau - 1)(9\tau - 1)^3 = 0, \quad \tau\tau' = 1.$$

Aus der Wurzel  $\tau = 1$  ergibt sich  $\tau' = 1$  und  $\varphi(\tau') = 0$  d. h.  $f' = 0$ . Dieses besondere transformirte Gitter ist also dem ursprünglichen ähnlich. Zwischen  $\tau$  und  $\mathcal{H}$  besteht die Gleichung  $\tau = \frac{\mathcal{H}^6}{27}$ ; zur Wurzel  $\tau = 1$  gehört also der Multiplikator  $\mathcal{H}^6 = 27$ . Nach der allgemeinen Theorie (vergl. pg. 235) wird der Multiplikator in unserem Falle bis auf eine zwölfte Einheitswurzel gleich dem Primfactor von 3, d. h. gleich  $\sqrt[3]{3}$ . Hiermit stimmt der soeben angegebene Werth  $\mathcal{H}^6 = 27$ .  $n = 5$ . Da 5 unzerlegbar, ist über diesen Fall um wenig zu bemerken. Die Gleichung 6ten Grades des  $\varphi(\tau) = 0$  muß zweimal drei gleiche Wurzeln haben. Sie lautet:

$$(t^2 - 10t + 5)^3 = 0;$$

ferner wird

$$t t' = 125, \quad t = -16^3.$$

$n=7$ . Da 7 unzerlegbar ist und zwar in zwei ungleiche Primfactoren, gibt es zwei singuläre Wurzeln der Gleichung  $\varphi(t) = 0$  und im Übrigen zweimal drei gleiche. Unsere Gleichung lautet in der That

$$(t^2 + 13t + 49)(t^2 + 5t + 1)^3 = 0$$

mit

$$t t' = 49 \text{ und } t = 16^2.$$

Die beiden singulären Werte von  $t$ , welche die complexe Multiplikation vorhersagt, sind die folgenden

$$t^2 + 13t + 49 = 0$$

also

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{-27}}{2};$$

die zugehörigen Werte von  $t'$  lauten dann offenbar

$$t' = \frac{-13 \mp \sqrt{-27}}{2}.$$

Wir haben daher, wie es sein muß,  $\varphi(t') = 0$  und  $j' = 0$ .

Von dem Werthe des Multiplikators wissen wir aus der allgemeinen Theorie, dass er gleich einem der Primfactoren  $\pi$  der Zahl 7 sein muss, d. h., gleich einer der 6 Kuben

$$2 \pm \sqrt{-3}, \quad \frac{-1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

In der That haben wir nach den vorstehenden Angaben

$$\tau = \left( \frac{-1 \pm 3\sqrt{-3}}{2} \right)^2 = 16^2.$$

$n=11$ . Auf den Fall  $n=11$  findet weder die allgemeine Theorie der complexen Multiplication noch der besondere rechnerische Ansatz Anwendung.

$n=13$ . Wieder gibt es zwei singuläre Wurzeln in der Gleichung

$$\varphi(\tau) \cdot (\tau^2 + 5\tau + 13)(\tau^4 + 7\tau^3 + 20\tau^2 + 19\tau + 1)^3 = 0.$$

Es sind dieses die Werthe

$$\tau = \frac{-5 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

Ferner haben wir



$$\tau \tau' = 13, \quad \tau = 16.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\tau' = \frac{-5 \pm \sqrt{-24}}{2}$$

und  $\varphi(\tau') = 0$ , wie es sein muss.  
Auch die Werte des Multiplika-  
tors stimmen mit der allgemeinen  
Theorie, da sie gleich geeigneten  
Primtheilern von 13 werden:

$$16 = \frac{-5 \pm \sqrt{-24}}{2}.$$

In der Hurwitz'schen Disserta-  
tion ist die Discriminante  $-3$  für  
alle möglichen Transformations-  
grade durchdiscutirt. Es ergibt  
sich dabei der allgemeine Satz  
(in Uebereinstimmung mit pg. 255):

Jedem Factor  $\nu$  des Transforma-  
tionsgrades  $n$  entspricht eine Wur-  
zel der Multipliatorgleichung,  
welche gerade gleich  $\nu$  ist. Die  
übrigen Wurzeln der Multiplia-  
torgleichung sind dreifach.

Hurwitz giebt die entsprechenden

Entwickelungen sind noch im Falle  $d = -4$ , d. h. für die zweite Ecke des Fundamentaldreiecks, wo  $g_3 = 0$  und daher  $F = 1$  ist.

16. VII. 96. Das allgemeine Ziel, welches wir bei den folgenden Entwickelungen im Auge haben soll dieses sein:

Näheres über die Natur der singulären Invarianten  $J$ , welche zu dem vorgegebenen Werthe  $-\Delta$  gehören, zu erfahren.

Wir werden uns dabei in erster Linie auf die Transformationsgleichung  $\mathcal{F}(f', f) = 0$  stützen, in zweiter Linie auch auf die Multiplikationsgleichung  $\Phi(\mathcal{H}, f) = 0$ .

Wir fragen uns vor allen Dingen wann in der Transformationsgleichung  $\mathcal{F}(f', f) = 0$  für irgend einen Transformationsgrad  $n$   $f' = f$  werden kann. Wir betrachten also die Gleichung:

$$\mathcal{F}(f, f) = 0$$

und haben damit den Ausgangspunkt der Kronecker'schen Ent-

wickelungen, nur daß Kronecker nicht das  $j$ , sondern das  $k'$  oder auch  $k^2(1-k^2)$  etc. als fundamentalen Modul benutzt.

Unmüßigst erkennt man leicht, daß unsere Gleichung lauter singuläre Invarianten  $j$  definiert.

Sei nämlich  $w$  der zu dem Werthe  $j$  gehörige Periodenquotient, welcher bis auf Transformationen erster Ordnung bestimmt ist. Durch Transformation  $n$ ter Ordnung entstehe aus  $w$  der Werth

$$w' = \frac{aw + b}{cw + d}, \quad ad - bc = n.$$

Soll nun  $j' = j(w')$  mit  $j = j(w)$  zusammenfallen, so muß  $w'$  mit  $w$  äquivalent sein. Wir können in der letzten Gleichung direkt  $w' = w$  setzen, indem wir die Transformation erster Ordnung, durch welche  $w'$  aus  $w$  erhalten wird, auf die rechte Seite der Gleichung werfen und die Bedeutung der

Zahlen  $a, b, c, d$  dementsprechend  
in passender Weise abändern. Wir  
erhalten so für  $w$  die folgende ganz-  
zählige Gleichung

$$cw^2 + (d-a)w - b = 0.$$

Die zugehörigen Wörthe von  $f$  sind  
daher sicher singuläre Invarianten.

Wir haben bereits pg. 234 einen Fall  
kennen gelernt, indem eine Wurzel  
 $f'$  der Transformationsgleichung  
 $F(f', f) = 0$  speciell gleich  $f$  wird.

Dieses trat dann ein, wenn der Trans-  
formationsgrad  $p$  in zwei Factoren  
 $\pi$  und  $\bar{\pi}$  zerfällt, welche in dem  
zu der Discriminante  $-D$  gehöri-  
gen Hauptgitter liegen. Aus dem  
Satze von pg. 230 ergibt sich leicht,  
dass auch das Umgekehrte richtig  
ist. Soll nämlich  $f'$  überhaupt  
gleich einer Invariante werden, wel-  
che zu derselben Discriminante ge-  
hört, wie  $f = f_a$ , so muß sich  $p$  in  
dem Gitter  $G_p$  zerlegen lassen und  
 $f'$  einen der Wörthe  $f_a - \beta$  oder

$\alpha + \beta$  haben. Soll nun speciell  $j' = \alpha$  werden, so muß  $\zeta_0$  das Hauptgitter werden,  $\beta$  also durch die zu  $\Delta \zeta_0$  gehörige Hauptform darstellbar sein. Uebertragen wir dieses Resultat von dem Primzahlgrade  $p$  auf einen beliebigen Grad  $n$ , so werden wir den Satz aufstellen:

Soll in der Transformationsgleichung  $j' = j$  werden, so muß der Transformationsgrad  $n$  durch die Hauptform derjenigen Discriminante  $-\Delta$  darstellbar sein, welche zu  $j$  gehört. Es wird in unserer Gleichung  $s$  viele Wurzeln  $j' = j$  geben als verschiedene Zerlegungen  $n \cdot \sqrt{\Delta}$  in dem betr. Hauptgitter möglich sind.

Der vorstehende Satz läßt sich auch ganz direkt beweisen. Soll  $j$  der Gleichung  $F(j, \beta) = 0$  genügen, so muß nach dem oben Gesagten ein zu  $j$  gehöriger Werth  $w$  eine Relation:

$$w = \frac{aw + b}{cw + d}, \quad ad - bc = n$$

Gefriedigen.

Schreiben wir dieselbe in Form einer quadratischen Gleichung:

$$c\omega^2 + (d-a)\omega + b = 0,$$

so werden im allgemeinen  $c$ ,  $d-a$ ,  $b$  einen gemeinsamen Theiler setzen wir  $u$  haben, nach dessen Fortschaffung die Gleichung lauten möge:

$$P\omega^2 + Q\omega + R = 0,$$

so dass wir haben

$$c = Pu \quad d-a = Qu \quad -b = Ru$$

Setzen wir noch  $a+d=t$ , so können wir die vier Coefficienten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  durch die Coefficienten unserer quadratischen Gleichung und  $t$  ausdrücken:

$$a = \frac{t - Qu}{2}, \quad b = -Ru, \quad c = Pu, \quad d = \frac{t + Qu}{2}.$$

Nun muss aber  $ad - bc = n$  sein oder, wenn wir die Discriminante von  $P\omega^2 + Q\omega + R = 0$  mit  $-\Delta$  be-

zeichnen:

$$\frac{t^2 + \nabla u^2}{4} = n.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber leicht, wie eine kleine Umrechnung zeigt, daß  $n$  durch die zu  $\nabla$  gehörige Hauptform darstellbar ist und zwar einerlei, ob  $\nabla$  durch 4 theilbar ist oder nicht.

Umgekehrt erkennt man, daß jede Lösung unserer Gleichung eine Transformation  $n$ ter Ordnung bestimmt, welche die Invariante  $f$  in sich verwandelt. Diese Aussage deckt sich aber mit dem zweiten Theile unseres Satzes.

Allerdings werden die so erhaltenen Transformationen  $n$ ter Ordnung, wenn  $n$  einen quadratischen Theiler  $\tau^2$  enthält, zum Theil ungentliche Transformationen sein können. Haben wir nämlich ein Lösungssystem  $t, u$  mit dem gemeinschaftlichen Theiler  $\tau$ , so tritt derselbe Theiler auch in  $a, b, c, d$  auf. Da wir aber bei der Auf-

stellung der Transformationsgleichung  $F(y' - y) = 0$ . Da man eigentliche Transformationen berücksichtigt haben, so sind die entsprechenden Werte von  $y$  als Wurzeln unserer Gleichung nicht mitzuzählen.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Anzahl der Wurzeln von  $F(y) = 0$  zu bestimmen. In dem Zwecke suchen wir uns die Anzahl der inäquivalenten  $w$ , zu denen unsere  $f$  gehören. An sich gehören natürlich zu jedem  $f$  unendlich viele  $w$ ; von diesen können wir aber jedesmal ein reducirtes  $w$  isoliren. Aus der Anzahl dieser reducirtten  $w$  wird dann die Anzahl der gesuchten  $f$  leicht folgen.

Wir haben also jetzt alle Gitter aufzusuchen, zu denen quadratische Formen  $(c, d - a, b)$  gehören, deren Coefficienten die Relation  $ad - bc = x$  zu befriedigen gestatten. In diesem Zwecke untersuchen wir zuvör.



derst, welche Werthe die Discriminan-  
ten unserer Gitter annehmen kön-  
nen. Wir haben dieselben bisher  
mit  $-4u^2$  bezeichnet, wollen  
jetzt aber einfach  $(-\Delta)$  dafür ab-  
ben, indem wir  $u = 1$  setzen, was  
zu keinen Irrthümern Anlaß geben  
wird. Natürlich können jetzt die  
Zahlen  $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  auch einen gemein-  
samen Theiler haben.

Der Werth  $\Delta$  muß dann, wie ge-  
zeigt ist, so gewählt werden, daß

$$n = \frac{t^2 + \Delta}{4}$$

gemacht werden kann, d. h. es muß  
sein:

$$\Delta = 4 \cdot n - t^2$$

Da  $\Delta$  positiv sein muß, können wir  
hier für  $t$  setzen:

$$t = 0, \pm 1 \pm 2 \dots \pm \mathcal{E}(2/n).$$

Die sämtlichen Discriminanten-  
werthe, zu denen unsere gesuchten  
Gitter gehören, sind also:

$$4n, 4n-1, 4n-2, \dots, 4n - [\xi(2k)]^2.$$

In jedem Werthe von  $- \nabla$  gehören nun eine Anzahl reducirter Formen  $(P, Q, R)$  [dem nur diese brauchen wir zu beachten, da wir ja nach Littera und nicht nach Formen fragen], die uns mit Hilfe der Grösse ein System von Coefficienten  $a, b, c, d$  zu berechnen gestatten. Wir haben nämlich:

$$a = \frac{t-Q}{2} \quad b = R \quad c = P \quad d = \frac{t+Q}{2}$$

Jede reducirte Form liefert also, je nachdem  $t=0$  oder  $|t| > 0$  ist, ein oder 2 Coefficientensysteme. Dementsprechend hat die Gleichung  $F(z(w), \bar{z}(w)) = 0$  eine einfache Wurzel im Falle  $t=0$ , eine doppelte im Falle  $|t| > 0$ .

Hierbei ist abermals zu bemerken, dass sich die Gleichung  $F(z, \bar{z}) = 0$  nur auf eigentliche Transformationen bezieht. Wir müssen daher unterscheiden zwischen solchen Wer-

then von  $t$ , für welche die Coeffi-  
enten

$$\frac{t-a}{2}, -R, P, \frac{t+a}{2}$$

theilerfremd und zwischen solchen  
für welche sie theilerhaltig sind.

Wir können jetzt direkt die Anzahl  
der Wurzeln unserer Gleichung  $F(x, y)$   
abzählen. Wir bezeichnen früher  
mit  $h(\Delta)$  die Zahl der primitiven,  
mit  $H(\Delta)$  die Zahl aller Klassen  
quadratischer Formen, welche zur  
Discriminante  $-\Delta$  gehören. Ausser-  
dem führen wir noch die Bezeich-  
nung  $H'(\Delta)$  für die Anzahl der  
jenigen Klassen  $(P, a, R)$  der Dis-  
criminante  $-\Delta$  ein, für welche  
die Zahlen

$$\frac{t \pm a}{2}, P \text{ und } R$$

theilerfremd sind. Alsdann folgt  
aus der soeben beschriebenen Auf-  
zählung der Verschwindungspunkte  
von  $F(x, y)$  in der  $w$ -Ebene, dass

ihre Anzahl gleich

$$\mathcal{H}'(4n) + 2\mathcal{H}'(4n-1) + 2\mathcal{H}'(4n-4) + \text{etc.} + \\ 2\mathcal{H}'(4n - \mathcal{E}(\sqrt{n}))$$

oder kürzer geschrieben gleich

$$\sum \mathcal{H}'(4n - t^2)$$

wird, wo  $t$  die Werthe  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2\mathcal{E}(\sqrt{n})$  durchläuft.

Unsere Abzählung bezog sich auf den reducirten Raum der  $w$ -Ebene. Die vorstehende Formel giebt die Anzahl derjenigen reducirten  $w$ , für welche  $F(f(w), f(w)) = 0$  ist. Wir wünschen aber vielmehr den in  $j$  gemessenen Grad der Gleichung  $F(f, f) = 0$  zu kennen, d. h. die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung in der  $j$ -Ebene zu bestimmen. Zu diesem Zwecke müssen wir uns die conforme Abbildung des einzelnen  $w$ -Dreiecks auf die  $j$ -Ebene gegenwärtig halten. Nach Früherem wird im Allgemeinen die Umgebung jeder Stelle  $w$

auf die  $f$ -Ebene eindeutig abgebildet. Nur die Punkte  $w = i$  bez.  $w = \zeta$  liefern eine zweifache bez. eine dreifache Ueberdeckung der zugehörigen Stellen  $f = 1728$  bez.  $f = 0$ . Ein einfacher Nullpunkt  $w = i$  bez.  $w = \zeta$  ist daher in der  $f$ -Ebene mit der Multiplizität  $\frac{2}{3}$  bez.  $\frac{2}{3}$  zu rechnen. Dem Werthe  $f = 1728$  entspricht die quadratische Gleichung  $w^2 + 1 = 0$  d. h. die quadratische Form  $(P, 0, P)$ ; andererseits gehört zu dem Werthe  $f = 0$  die quadratische Gleichung  $w^2 + w + 1 = 0$ , d. h. die Form  $(P, P, P)$ . Hiernach müssen wir sagen:

Die Anzahl der Wurzeln von  $F(x, y) = 0$  in der  $f$ -Ebene ist ebenfalls gegeben durch

$$\sum H'(4n - t^2);$$

nur haben wir jetzt bei der Auswertung dieser Summe die Classen  $(P, 0, P)$  mit der Hälfte, die Classen  $(P, P, P)$  mit dem dritten Theile der  $z$  gemacht sich

ergebenden Anzahlen in Rechnung zu setzen.

Wir wollen dieselbe Thatsache noch etwas anders ausdrücken, indem wir von der Riemann'schen Fläche  $F(f', f) = 0$  sprechen. Auf dieser Fläche befindet sich jedes Wertenpaar  $(f', f)$  durch einen und nur durch einen Punkt vertreten. Wir fassen nun diejenigen Stellen in's Auge, in welchen die auf der Fläche eindeutige Function  $f' - f$  verschwindet. Die Anzahl dieser (mit der richtigen Multiplicität gezählten) Stellen stimmt genau mit dem soeben bestimmten Grade der Gleichung  $F(f', f) = 0$  überein.

Nach den früheren Erörterungen über das Transformationspolygon in der  $w$ -Ebene kennen wir nämlich die Riemann'sche Fläche  $F(f', f) = 0$ . Dieselbe entsteht aus jenem Polygon durch Zusammenbiegen der Ränder und hat Verzweigungspunkte nur in den Stellen  $f = 0$ ,

$1728$  und  $\infty$ , welche den Ecken der  
 Fundamentaldreiecke in der  $w$ -Ebene  
 entsprechen. Hiernach findet sich je-  
 de von  $\infty$ ,  $0$  und  $1728$  verschiedene  
 Stelle der  $z$ -Ebene auf den verschie-  
 denen Blättern der Riemann'schen  
 Fläche in conformer Uebertragung  
 vor. Haben wir also in der  $z$ -Ebene  
 eine Wurzel der Gleichung  $F(z, z) = 0$ ,  
 von gewisser Multiplicität, so ha-  
 ben wir auf der Riemann'schen Flä-  
 che  $F(z', z) = 0$  eine Verschwindungs-  
 stelle  $z' - z = 0$  von derselben Mul-  
 tiplicität. Dies gilt zunächst un-  
 ter der Voraussetzung  $z \neq 0$  oder  
 $1728$ , (die Stelle  $z = \infty$  kommt für  
 unsere Frage überhaupt nicht in  
 Betracht). Betrachten wir nun die  
 Stellen  $z = 0$  und  $z = 1728$ . Hier  
 ist die  $z$ -Ebene allgemein zu  
 reden von drei bez. von zwei-  
 fachen Windungspunkten unse-  
 rer Riemann'schen Fläche über-  
 lagert.

Wir behaupten aber, dass an

diesen Stellen ausserdem eine Anzahl un-  
verzweigter Blätter verlaufen und dass die-  
se gerade die uns interessierenden Werte-  
paare  $(0,0)$  bez.  $(1728, 1728)$  tragen. Der Beweis  
 ergibt sich unmittelbar aus den Reihen-  
 entwicklungen von  $f$  und  $f'$  in der  $w$ -Ebe-  
 ne. Wir haben einerseits für die dem Werte  
 $f=0$  benachbarten Werte die Entwicklung

$$f = c_1 (w - \varrho)^3 + c_2 (w - \varrho)^6 + \dots$$

Gleichzeitig erhalten wir durch Transfor-  
 mation  $n^{\text{te}}$  Ordnung für  $f'$ , falls  $f'$  mit  $f$   
 zusammenfällt, die folgende Entwicklung

$$f' = c'_1 (w - \varrho)^3 + c'_2 (w - \varrho)^6 + \dots$$

Durch Elimination von  $w$  ergibt  
 sich für  $f$  eine nach ganzen Potenzen  
 von  $f'$  und ebenso für  $f'$  eine  
 nach ganzen Potenzen von  $f$  fort-  
 schreitende Entwicklung. Dassel-  
 be zeigt, dass dasjenige Blatt der  
 Riemann'schen Fläche, welches  
 die Stelle  $f=0, f'=0$  trägt,  
 an dieser Stelle unverzweigt  
 ist. Das Entsprechende gilt  
 für die Stelle  $f=1728, f'=1728$ . Hier-  
nach ist klar, dass sich die



Nullpunkte von der  $z$ -Ebene  
mit ungeänderter Multiplizität  
auf die Riemann'sche Fläche über-  
tragen.

Hierin hat die Funktion  $f'-f$  auf  
unserer Riemann'schen Fläche  
so viele Nullstellen, als die Gleich-  
ung  $F(z, f) = 0$  in der  $z$ -Ebc-  
ne Wurzeln besitzt, nämlich

$$\sum 2h' (4n - t^2),$$

wobei für die Berechnung die-  
ser Summe die Bemerkungen von  
pag. in Kraft bleiben.

Wir schließen hier einen klei-  
 nen Excurs über die sogenannten  
Strohecker'schen Classenzahlrela-  
tionen an, welche interessante  
 Beziehungen zwischen verschie-  
 denen zahlentheoretischen Func-  
 tionen ergeben.

In unserer Endformeln werden  
 wir wünschen, statt der Klassen

zahlen  $H'$ , deren Definition (vergl. pg. 259) eine etwas künstliche war, die Klassenzahlen  $H$ , d. h. die Anzahlen aller primitiven oder imprimitiven Klassen derselben Discriminante figurieren zu sehen.

Wir erreichen dieses dadurch, daß wir zu der bisherigen Transformationsgleichung  $F(f', f) = 0$  (ausführlicher geschrieben:

$F_n(f', f) = 0$ , da es sich um alle eigentlichen Transformationen  $n$ ter Ordnung handelt) die sämtlichen Gleichungen

$$F_{\frac{n}{t}}(f', f) = 0,$$

wobei  $t$  die sämtlichen quadratischen Teiler von  $n$  durchläuft, hinzunehmen.

Jede einzelne dieser Gleichungen liefert die eigentlichen Transformationen von der Ordnung  $\frac{n}{t}$ , oder wie wir sagen können, die in-

eigentlichen Transformationen  
n-ter Ordnung mit dem gemein-  
samen Factor  $\tau$ . Alle Werthe von  
 $f$ , welche bei diesen uneigentli-  
 chen Transformationen in sich  
 übergehen, werden durch die  
 Gleichung

$$\frac{F_n}{\tau^2}(f, f) = 0$$

erhalten. Mittin bekommen  
 wir die Gesamtheit aller Werthe  
 $f$ , welche bei den eigentlichen  
 und uneigentlichen Transfor-  
 mationen n-ter Ordnung un-  
 geändert bleiben, aus der Glei-  
 chung

$$\prod_{(1)} \frac{F_n}{\tau^2}(f, f) = 0.$$

Der Grad dieser Gleichung er-  
sieht sich sofort aus dem Gra-  
de von  $F_n(f, f) = 0$ . Da der letz-  
 tere gleich  $\sum H'(4n - t^2)$  war,  
so wird der erstere erichtlich

gleich

$$\Sigma H(4n-t^2).$$

Wir haben nämlich jetzt einfach die Nichttheilbarkeitsbedingung von pag. 259 unberücksichtigt zu lassen, und dementsprechend  $H'$  durch  $H$  zu ersetzen.

Diese Formel bedarf einer Ergänzung, wenn  $n$  eine reine Quadratzahl ist. In diesem Falle müssen wir jedenfalls festsetzen, daß bei der Bildung unserer Gleichung  $\Pi F_{\tau} (z, z) = 0$  nur solche  $\tau$  benützt werden, welche kleiner als  $(\sqrt{n})$  sind. Wollten wir nämlich  $\tau = kn$  setzen, so würde in unserer Gleichung der Factor

$$F_1(z, z)$$

vorkommen, welcher da  $z$  bei beliebigen Transformationen erster Ordnung ungeändert bleibt, identisch verschwinden würde.

Dementsprechend werden wir auch bei der Berechnung von

$\sum H(4n-t^2)$  diejenigen Classen  
(P, Q, R) nicht mitzählen dürfen,  
welche bei einer Transformation  
erster Ordnung ungcändert blei-  
ben. Die Discussion der Pell'schen  
Gleichung, die jetzt auf die ge-  
wöhnliche Form

$$\frac{x^2 + \Delta u^2}{4} = 1$$

zurückkommt, zeigt dass in unse-  
rer Summe 3 solche Classen vor-  
kommen, nämlich  $u=1, \Delta=3, t=\pm 1$   
und  $u=1, \Delta=4, t=0$ . Ersichtlich  
liefern die beiden ersten Lösungen  
als zugehörige Invariante  $f=0$ ,  
die dritte  $f=1728$ ; zu dem Werthe  
 $\sum H$  würden die beiden ersten nach  
unserer früheren Verabredung  $\frac{2}{3}$ ,  
die dritte  $\frac{1}{2}$  Einheiten beitragen.  
Diesen Betrag haben wir also in  
Abzug zu bringen. Keithin wird der  
Grad der Gleichung  $\Pi F=0$ , im  
Falle  $n$  ein vollständiges Qua-  
drat ist, gleich

$$\underline{\underline{\sum H(4n-t^2) - \frac{7}{6}}}$$

Die somit bestimmte Anzahl berechnen wir jetzt noch auf eine zweite Weise. Wir knüpfen dabei an die Riemann'sche Fläche an, welche zu der Gleichung  $\Pi F(z) = 0$  gehört. Diese Fläche besteht aus der Überlagerung einer Reihe einzelner Riemann'scher Flächen, welche bez. durch die Gleichung  $F_{\frac{1}{2}}(z) = 0$  gegeben sind und deren Charakter wir pg. 262 ff studirt haben. Die fragliche Anzahl ist nun gleich der Zahl der Verschwindungspunkte von  $f' - f$  auf der so entstehenden Gesamtläche. Andererseits wissen wir aus der Functionentheorie, daß die Zahl der Verschwindungspunkte einer algebraischen Function gleich ist der Zahl ihrer Unendlichkeitspunkte. Die Unendlichkeitsstellen von  $f' - f$  liegen sämtlich bei  $z = \infty$ ; ihre Anzahl sowie ihre Vertheilung auf die verschiedenen Blätter der Fläche lassen sich aus den bekannten

271.

nach  $u = e^{2ix\omega}$  fortschreitenden Reihen von  $f'$  ablesen. Es ergibt sich als Resultat, wie wir hier nur historisch anführen:

Die Anzahl der bei  $z = \infty$  in den verschiedenen Blättern liegenden Unendlichkeitsstellen beträgt

1. Wenn  $n$  keine Quadratzahl ist:

$$\phi(n) + \psi(n),$$

2. wenn aber  $n$  gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl ist:

$$\phi(n) + \psi(n) - 1.$$

Hier verstehen wir unter  $\phi(n)$  die Theilersumme von  $n$ , wobei unter  $\mathcal{I}$  einen beliebigen Theiler von  $n$  verstanden,

$$\phi(n) = \sum \mathcal{I}$$

wird. Ferner wird

$$\psi(n) = \sum \mathcal{I}' - \sum \mathcal{I}'',$$

wo  $\mathcal{I}'$  bez.  $\mathcal{I}''$  diejenigen Theiler

zu durchlaufen haben, welche größer  
bez. kleiner als  $V_n$  sind.

Durch Vergleich unserer Formeln  
für die Null- und Unendlichkeitsstel-  
len kommen wir zu der folgenden  
merkwürdigen Relation:

1. im Falle eines allgemeinen  $n$ :

$$2\mathcal{H}(4n) + 2\mathcal{H}(4n-1) + 2\mathcal{H}(4n-4) + \dots \\ 2\mathcal{H}(4n-t^2) = \Phi(n) + \Psi(n). [t = 2\mathcal{E}(\sqrt{n})].$$

2. im Falle eines quadratischen  $n$ :

$$\mathcal{H}(4n) + 2\mathcal{H}(4n-1) + 2\mathcal{H}(4n-4) + \dots + 2\mathcal{H}(4n-t^2) \\ - \mathcal{H}_0 = \Phi(n) + \Psi(n) - 1. [t = 2\sqrt{n} - 1].$$

Wir bezeichnen diese Relationen  
als Classenzahlrelationen erster  
Stufe, im Gegensatz zu den Classen-  
zahlrelationen höherer Stufe, welche  
wir später kennen lernen werden.  
Die letzteren werden wir aus den In-  
varianten der höheren Stufen ähn-  
lich ableiten, wie die vorstehenden  
aus der Invariante  $f$ .

Unsere Relationen sind zuerst von  
Kronecker im Jahre 1858 aufge-



stellt; später sind sie ins Besondere von Gierster entwickelt worden. Vergl. hierzu die historischen Bemerkungen in Neuluf. I, Abchn. 4, Cap. 5 und 6 pg. 160ff.

Das Interesse der Klassenzahlrelationen besteht in erster Linie darin, daß sie die complicirte zahltheoretische Function  $H$  mit den elementaren Functionen  $\varphi$  und  $\psi$  in Beziehung setzt und die erstere aus den letzteren zu berechnen gestattet.

In den beiden soeben unterhandelnen Fällen ( $n$  allgemein und  $n$  quadratisch) geben wir je ein numerisches Beispiel.

1.  $n = 12$ .

Die linke Seite unserer Relation besteht aus den Termen:

$$H(48) + 2H(47) + 2H(44) + 2H(39) + 2H(32) + 2H(27) + 2H(12).$$

Die Zahlen  $H$  reduciren wir zunächst durch Abspalten der quadratischen Theiler auf die Zahlen  $h$ . So ergibt sich z. B.

274.

$$\mathcal{H}(48) = h(48) + h(12) + h(3).$$

Die Zahlen  $h$  ihrerseits entnehmen wir aus den Cayley'schen Tabellen, wobei wir nur berücksichtigen müssen, daß nach unserer Verabredung die Anzahl der Classen  $(\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{P})$  bez.  $(\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{P})$  mit  $\frac{1}{3}$  bez.  $\frac{1}{2}$  zu multipliciren ist.

In solcher Weise finden wir:

$$\mathcal{H}(48) = h(48) + h(12) + h(3) = 2 + 1 + \frac{1}{3}$$

$$2\mathcal{H}(47) = 2h(47) = 10$$

$$2\mathcal{H}(44) = 2h(44) + 2h(11) = 6 + 2$$

$$2\mathcal{H}(39) = 2h(39) = 8$$

$$2\mathcal{H}(32) = 2h(32) + 2h(8) = 4 + 2$$

$$2\mathcal{H}(23) = 2h(23) = 6$$

$$2\mathcal{H}(12) = 2h(12) + 2h(3) = 2 + \frac{2}{3}$$

---


$$\text{In Summa} = 44.$$

Andererseits haben wir

$$\Phi(12) = 12 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

$$\Psi(12) = 12 + 6 + 4 - 3 - 2 - 1 = 16$$

---


$$\text{In Summa} = 44$$

275.

2.  $n = 16$ .

Hier haben wir zunächst zu berechnen

$$\mathcal{H}(64) + 2\mathcal{H}(63) + 2\mathcal{H}(60) + 2\mathcal{H}(55) \\ + 2\mathcal{H}(48) + 2\mathcal{H}(39) + 2\mathcal{H}(28) + 2\mathcal{H}(15).$$

Aus den Cayley'schen Tabellen ergibt sich mit Rücksicht auf unsere Terabredungen:

$$\mathcal{H}(64) = h(64) + h(16) + h(4) = 2 + 1 + 1/2$$

$$2\mathcal{H}(63) = 2h(63) + 2h(7) = 8 + 2$$

$$2\mathcal{H}(60) = 2h(60) + 2h(15) = 4 + 4$$

$$2\mathcal{H}(55) = 2h(55) = 8$$

$$2\mathcal{H}(48) = 2h(48) + 2h(19) + 2h(3) = 4 + 2 + 2/3$$

$$2\mathcal{H}(39) = 2h(39) = 8$$

$$2\mathcal{H}(28) = 2h(28) + 2h(7) = 2 + 2$$

$$2\mathcal{H}(15) = 2h(15) = 4$$

---

In Summa  $52 \frac{1}{6}$

Die linke Seite der Klassenzahlrelation beträgt daher wegen des Subtrahenten  $7/6$ : 51.

Andererseits wird

276.

$$\begin{aligned} \phi(n) &= 16 + 8 + 4 + 2 + 1 & = 31 \\ \psi(n) - 1 &= 16 + 8 - 2 - 1 - 1 & = 20 \end{aligned}$$

Die rechte Seite unserer Relation  
gibt also wirklich gleichfalls

$$31 + 20 = \underline{51.}$$

Nach diesem Excursus kehren  
wir zu der Gleichung  $F(z, z) = 0$   
zurück. Wir haben pg. 258 die Wur-  
zeln dieser Gleichung in eine Reihe  
von Kategorien gespalten, je nach  
den zugehörigen Werthen der Dis-  
criminante  $-\Delta$ . Die bezüglichen  
Werthe waren

$$\Delta = 4n, 4n-1, 4n-4, \text{ etc.}$$

Die Wurzeln der  $i$ -ten (zu  $\Delta = 4n$ )  
gehörigen Kategorie waren einfache,  
die der übrigen doppelte Wurzeln  
unserer Gleichung. \*) Wir werden  
uns nun die linke Seite von  $F(z, z) = 0$

\*) Hierbei ist der Kürze halber von der etwa-  
igen Multiplizität der Wurzeln  $z=0$  und  $z=1$  ab-  
gesehen.

277.

in ebenso viele Bestandtheile gespalten denken, als es unterschiedene Kategorien giebt. Wir können etwa schreiben:

$$1) F(y, y) = X'_{4n}(y) \cdot [X'_{4n-1}(y)]^2 \cdot [X'_{4n-4}(y)]^2 \cdot [\dots]$$

Der Grad des einzelnen Bestandtheiles in  $y$  beträgt nach pag. 259 bez.

$2H'$ ,  $2H'(4n-1)$ ,  $2H'(4n-4), \dots$   
 Neben den Ausdrücken  $X'$  führen wir sogleich gewisse ähnlich gebaute Ausdrücke  $X$  und  $\chi$  ein, welche zu  $H$  und  $h$  in demselben Verhältnisse stehen wie  $X'$  zu  $H'$ . Es soll nämlich  $X \nabla(y)$  gleich Null gesetzt, alle diejenigen in der Anzahl  $H$  vorhandenen Invarianten primitiven oder imprimitiven Classen liefern, welche zur Discriminante  $\nabla$  gehören. Ebenso soll  $X_0(y) = 0$  die in der Anzahl  $h$  vorhande-

nen Invarianten primitiver Classen von der Discriminante  $\Delta$  bestimmen. Die Gleichung  $\chi_{\Delta}(j) = 0$  bez.  $\chi'_{\Delta}(j) = 0$  werden wir als (primitive bez. imprimitive) Classengleichung bezeichnen.

Natürlich steckt  $\chi_{\Delta}$  im  $\chi'_{\Delta}$  und dieses im  $\chi_{\Delta}$  als ein Factor.

Unser Ziel soll es nun sein, durch Benützung der zu den verschiedenen Werthen von  $n$  gehörigen Gleichungen  $F_n(j, j) = 0$  für jedes  $\Delta$  eine Classengleichung  $\chi_{\Delta}(j) = 0$  zu isoliren. Das Hauptresultat dieser Untersuchung wird folgendes sein. Die Classengleichung ist ebenso wie die Transformationsgleichung eine ganzzahlige algebraische Gleichung, deren höchster Coefficient der Einheit gleichkommt.

Inwörderst wollen wir an der Gleichung 1) eine kleine Vereinfachung vornehmen. Wir wollen nämlich rechts und links diejenigen

Factoren fortheben, welche zu den Discriminanten  $-\Delta = -3$  und  $-\Delta = -4$  gehören, oder zu solchen Discriminanten, die sich von  $-3$  und  $-4$  nur um einen quadratischen Factor unterscheiden. Die entsprechenden Werthe von  $f$  sind  $f = 0$  und  $f = 1728$ . Diese Werthe von  $f$  machen uns früher bei der Abzählung des Grades der Transformationsgleichung Schwierigkeiten, überdies interessieren sie uns jetzt nicht mehr, insofern wir uns mit der Gleichung  $X_{\Delta}(f) = 0$  beschäftigen wollen. Die in solcher Weise durch Forthebung der Factoren  $(f)$  und  $(f - 1728)$  vereinfachte Gleichung mögen wir etwa die „gereinigete Transformationsgleichung“ nennen.

Wir führen nun den Nachweis, daß wir die einzelne Classengleichung  $X_{\Delta}(f)$  stets mittelst rationaler Prozesse aus unseren gereinigten Transformati-

ausgleichungen herstellen können. Wir wollen zu dem Zweck voraussetzen, dass dies bereits für alle  $\Delta \leq 4n - 4$  geschehen sei, und werden jetzt beweisen, dass wir dann auch die Classengleichungen für  $\Delta = 4n - 1$  und  $\Delta = 4n$  rational berechnen können. Wir bilden:

$$F_{4n}(y) = X'_{4n}(y) [X'_{4n-1}(y)]^2 \cdot [X'_{4n-4}(y)]^2$$

Hier sind, wie man sofort aus unserer Annahme schliesst, alle Factoren von  $[X'_{4n-4}(y)]^2$  rational bekannt, wir können daher

$$X'_{4n}(y) [X'_{4n-1}(y)]^2$$

durch einfache Division berechnen,

Stellt man jetzt die grossen  $X'$  durch die kleinen  $x$  dar und ordnet die letzteren nach der Grösse der zu.



gehörigen Determinanten, so werden die Anfangsglieder des letzten Produktes offenbar  $x_{4n}(x_{4n-1})^2$ . Was noch folgt, sind lauter Factoren  $x_i$  für kleinere Determinanten. Da wir diese als rational bekannt angesehen haben, können wir sie einfach fortlassen; es ist somit auch das Produkt

$x_{4n}(x_{4n-1})^2$  rational herstellbar.

Beachten wir jetzt noch, daß die Gleichung  $x_{4n}$  keine Doppelwurzel besitzt, so ergibt sich nach bekannten Sätzen der Gleichungstheorie sofort, daß man aus dem Produkt  $x_{4n}(x_{4n-1})^2$  rational die Factoren  $x_{4n}$  und  $x_{4n-1}$  abspalten kann, was wir zeigen wollen.

Um unseren Beweis vollständig zu machen, zeigen wir jetzt noch, daß  $x_8$  und  $x_7$  rational berechnet werden können. Bilden wir nämlich  $F_2(f, f)$ , so ergibt sich:

$$F_2(f, f) = x_8'(f) [x_7'(f)]^2,$$

indem wir die Determinanten - 4, -3 unberücksichtigt lassen. Nun ist weiter:

$$X_8'(z) = X_8(z), \quad X_7'(z) = X_7(z),$$

immer unter der Voraussetzung, dass wir  $X_4(z)$  und  $X_3(z)$  unterdrücken.

Es folgt also:

$$F_2(z, z) = X_8(z) [X_7(z)]^2.$$

Damit ist aber gezeigt, dass  $X_8(z)$  und  $X_7(z)$  rational berechnet werden können. Uebrigens sind  $X_8(z) = 0$  und  $X_7(z) = 0$  sogar Gleichungen ersten Grades, also die zugehörigen  $z$  rational, da sowohl für  $\nabla = 8$  wie für  $\nabla = 7$  nur eine Classe existiert.

Wir gewinnen so ganz allgemein das Resultat:

Die Gleichung  $n$  ten Grades  $X_{\nabla}(z) = 0$  welche die  $n$  zur Discriminante  $-\nabla$  gehörigen singulären  $z$  bestimmt, ist eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten.

Wir behaupten aber ferner:

Der Coefficient des höchsten Gliedes in dieser Gleichung ist gleich 1.

Der Beweis lässt sich so führen, dass man zunächst zeigt: Das höchste Glied der Gleichung  $F(z, z') = 0$  hat zum Coefficienten die Einheit. Dies gelingt in der Weise, dass man sich das Bildungsgesetz der Coefficienten von  $F(z, z')$  aus den Reihenentwickelungen von  $z$  und  $z'$  nach Potenzen von  $r$  klar macht. Zunächst erkennt man, solange  $n$  kein volles Quadrat ist, dass der höchste Coefficient an sich gleich 1 wird. Ist aber  $n$  ein volles Quadrat, so wird der höchste Coefficient zwar gleich  $V_n$ ; gleichzeitig nehmen aber auch alle übrigen Coefficienten den Factor  $V_n$  an, so dass wir nach Forthebung desselben wieder als ersten Coefficienten die Eins übrig behalten. —

Bei der Zerlegung der Gl.  $F = 0$  in die einzelnen Theilgleichungen

$x=0$  geht nun offenbar die Eigenschaft, die Einheit zum höchsten Coefficienten zu haben, auf alle Theilgleichungen über.

Es ist dies hier nicht weiter anzuführen, weil es algebraisch ganz einfach ist.

Wir mögen dieses Resultat so ausdrücken, daß wir sagen:

Die  $h$  singulären Werthe von  $z$  sind nicht nur algebraische Zahlen selbst, sondern sie sind ganze algebraische Zahlen. -

Das Verfahren, welches wir bei der Aufstellung der Classengleichung befolgten, ist allerdings ein rein theoretisches. Für die numerische Durchführung wäre es sehr unpraktisch, von der Transformationsgleichung des  $z$  seinen Ausgang zu nehmen, weil die Gleichung, wie wir sahen, schon für kleine Transformationsgrade ungeheuer complicirt ist. Hier treten die Modulen höherer Stufe in ihr Recht, wie weiter unten

nach näher auszuführen.

Wir theilen die Classengleichung für die allereinfachsten Fälle

$$\nabla = 3, 4, 7, 8$$

im Anschlusse an Weber mit. In den beiden ersten Fällen lautet sie natürlich

$$f = 0 \text{ und } f - 1728 = 0.$$

Auch in den beiden folgenden Fällen ist noch  $h = 1$ . Man findet hier als Classengleichung:

$$f + 9375 = 0 \text{ bez. } f - 8000 = 0.$$

29. VIII. 96. Unsere nächste Aufgabe soll es jetzt sein, die Classengleichung  $X^{\nabla} = 0$  näher zu studiren.

Im Allgemeinen kann man bei der Untersuchung einer algebraischen Gleichung zwei verschiedene Gesichtspunkte verfolgen. Man kann sich entweder die Aufgabe stellen, die Wurzeln der Gleichung zu separiren, sie numerisch mit vorgegebener Genauigkeit zu berechnen;

im Anschlusse hieran wird man die Frage entscheiden, wie viele Wurzeln reell werden etc. Andererseits kann man die Gleichung daraufhin untersuchen, ob sie durch Wurzelzeichen lösbar ist oder, wenn dieses nicht der Fall ist, welches die einfachsten Irrationalitäten sind, mit deren Hilfe die Gleichung sich reduciren lässt. Die erste Art der Fragestellung bezeichnet man wohl als die numerische, die zweite als die algebraische Auflösung der Gleichungen.

Was die erstere Art der Untersuchung betrifft, so ist dieselbe bei unserer Classengleichung eigentlich schon implicite erledigt. In dem wir die zu der vorgelegten Discriminante  $-\Delta$  gehörigen reducirten Formen  $p\omega^2 + q\omega + r$  aufzählen, bekommen wir durch Nullsetzen derselben eine Anzahl von Punkten  $\omega$  in dem reducirten

Dreiecke der Modultheilung. Die  
Trennung der Wurzeln unserer Gleichung  
ist damit geleistet. Von den  
 Werthen  $w$  kommen wir mittelst  
 der bekannten Potenzentwickelun-  
 gen zu den zugehörigen Werthen  
 von  $f$ . Diese lassen sich hiernach  
mit beliebiger Genauigkeit nume-  
risch berechnen. Auch die Frage  
 nach der Realität der Wurzeln  
 erledigt sich leicht. Es fallen näm-  
 lich diejenigen und nur diejeni-  
 gen Werthe von  $f$  auf die reelle  
 Axe der  $f$ -Ebene, deren zugehöri-  
 ge  $w$ -Werthe auf der Begrenzung  
 bez. der Mittellinie des reducir-  
 ten Dreiecks liegen. Diese entspre-  
 chen bekanntermassen den An-  
 cepts-Formen. Wir haben also un-  
ter den Wurzeln der Classenglei-  
chung soviel reelle Werthe, als  
es Anceptsclassen der Discrimi-  
nante -  $\Delta$  giebt.

Gehen wir nun zu der zweiten  
 Art der Betrachtung über. Wir

haben in dieser Hinsicht das einfache Resultat zu beweisen:

Unsere Clausengleichung ist im Rationalitätsbereiche  $\sqrt{-\Delta}$  eine Abel'sche Gleichung.

Bekanntlich heißt eine Gleichung dann eine Abel'sche Gleichung, wenn jede Wurzel rational durch jede andere ausgedrückt werden kann und wenn die rationalen Operationen, durch welche man von einer Wurzel zu einer beliebigen anderen übergeht, gegen einander vertauschbar sind.

In unserem Falle wird sich sogar noch etwas Weiteres ergeben. Die Form der rationalen Function, welche aus  $\alpha$  eine andere Wurzel  $\alpha + \beta$  entstehen läßt, hängt lediglich von dem Werthe  $\beta$  ab und ist für alle Werthe von  $\alpha$  dieselbe. Wir können dieses so ausdrücken, daß wir schreiben:

$$\alpha + \beta = R_{\beta}(\alpha).$$



Dieser Umstand lässt einen interessanten Schluss auf die Gruppe unserer Gleichung zu. Dieselbe ist natürlich erstens eine Abel'sche Gruppe, d. h. eine Gruppe vertauschbarer Operationen. Zweitens aber erkennen wir, dass sie mit der Gruppe der Composition genau parallel läuft (ihr „isomorph“ ist).

Der Uebergang von  $\mathfrak{z}_\alpha$  zu  $\mathfrak{z}_{\alpha+\beta}$  wird nämlich in der Gittersprache dadurch bewerkstelligt, dass wir das Gitter  $\mathfrak{G}_\alpha$  mit dem Gitter  $\mathfrak{G}_\beta$  multipliciren, wobei sich das Gitter  $\mathfrak{G}_{\alpha+\beta}$  ergibt. Die Multiplication mit  $\mathfrak{G}_\beta$  hat also auf die Wurzeln  $\mathfrak{z}_\alpha$  der Classengleichung denselben Einfluss, wie die rationale Operation  $R_\beta$ . In beiden Fällen besteht die charakteristische Eigenschaft, dass sich die Indices  $\alpha$  und  $\beta$  einfach additiv an einander reihen. Wir kommen also zu dem merkwürdigen Ergebnis:

Die ursprünglich zahlentheoretisch  
definierte Gruppe der Composition  
gewinnt bei der Classengleichung  
eine algebraische Bedeutung.

Um die vorstehenden Behauptungen zu beweisen, haben wir nur die Richtigkeit der Gleichung

$$f_{\alpha+\beta} = R_{\beta}(f_{\alpha})$$
 darzutun. Ist nämlich gezeigt, daß jede Wurzel in solcher Weise durch eine rationale Operation aus jeder anderen erhalten werden kann, so ergibt sich die Vertauschbarkeit dieser rationalen Operationen von selbst. In der That wird dann

$$R_{\gamma}(R_{\beta}(f_{\alpha})) = f_{(\alpha+\beta)+\gamma} = f_{(\alpha+\gamma)+\beta} = R_{\beta}(R_{\gamma}(f_{\alpha})).$$

Wir stützen uns beim Beweise in erster Linie wieder auf die Trans-  
formationsgleichung. Während wir aber bisher solche Transformationsgrade  $n$  heranzogen, welche sich im Hauptgitter zerlegen

Liessen, benutzen wir jetzt Transformationsgrade, welche in das Produkt zweier im Nebengitter  $G_\beta$  bez.  $G_{-\beta}$  befindlicher Zahlen  $V$  und  $\bar{V}$  zerfallen. Hinsichtlich der Wurzeln unserer Transformationsgleichung ergibt sich daraus folgende Umänderung der Fragestellung. Wir haben früher nach denjenigen Werten  $j'$  gefragt, welche mit  $j$  identisch sind, entsprechend der Annahme, dass  $n$  in zwei Hauptzahlen zerlegt werden kann und mit Rücksicht darauf, dass bei der Multiplikation mit einer Hauptzahl das zu dem Werte von  $j$  gehörige Gitter ungeändert bleibt. Wir werden jetzt nach denjenigen Werten  $j'$  fragen, welche nicht direkt gleich  $j$ , sondern gleich  $j \pm \beta$  sind; da nämlich die Zahlen  $V$  und  $\bar{V}$  den Nebengittern  $G_\beta$  und  $G_{-\beta}$  angehören sollen, wird sich das Gitter  $G_j$  bei der complexen Multiplikation mit  $V$  und  $\bar{V}$  je

in ein Gitter verwandeln, welches in das Gitter  $G \pm \beta$  bez.  $G\alpha - \beta$  eingelagert ist, so daß ja in  $ja \pm \beta$  übergeht.

Ubrigens werden wir beim Beweise nur Primzahlgrade der Transformation benutzen. Wir sind dadurch einer Reihe von Fällenunterscheidungen überhoben, welche bei zusammengesetzten Transformationsgraden die Betrachtung erschweren. Indessen hat diese Beschränkung auch einen Nachtheil. Wir werden nämlich mit unserem Beweise nur dann durchkommen, wenn wir den Satz benutzen, dafs in jedem unserer  $h$  Gitter Primzahlen  $\pi$  vorkommen. Der Beweis dieses Satzes erfordert höhere Betrachtungen und ist von Weber geliefert worden. Wir müssen hier den Satz als bewiesen übernehmen.\*)

\*) Dieses ist aber, wie wir wiederholen, nur ein Mittel zur Abkürzung der Darstellung. Wir können auch ohne den Weber'schen Satz durchkommen, indem wir solche zusammengesetzte Transformationsgrade  $n$  betrachten, die sich im Gitter  $G\beta, G-\beta$  zerlegen.

Die Transformationsgrad  $p$  soll in unserer Normalfigur die Herleitung

$$p = \pi \cdot \bar{\pi}$$

gestatten. Die Zahl  $\pi$  gehöre dem von dem Hauptgitter verschiedenen Gitter  $G_\beta$  an, so daß  $\beta \neq 0$  ist. Wir können die folgenden drei Fälle unterscheiden:

- 1.)  $\pi = \bar{\pi}$  und  $G_\beta = G_0$
- 2.)  $\pi \neq \bar{\pi}$  ,  $G_\beta = G_{-\beta}$
- 3.)  $\pi \neq \bar{\pi}$  ,  $G_\beta \neq G_{-\beta}$ .

In den beiden ersten Fällen ist  $G_\beta$  ein Lincepgitter u. zw. befindet sich im Falle 1.) der Punkt  $(\pi, \bar{\pi})$  auf einer Symmetrielinie des Lincepgitters, im Falle 2.) in einer beliebigen Ecke desselben. Im dritten Falle ist  $G_\beta$  kein Lincepgitter.

Betrachten wir nun die zur Zahl  $p$  gehörige Transformationsgleichung

$$F_p(z', z) = 0.$$

Unter den  $p+1$  Wurzeln  $z'$  befinden sich die Werte  $z' = z + \beta$  in

$f' = f\alpha - \beta$ . Es sind dieses nach pg. 230 zugleich die einzigen Wurzeln von  $f'$  welche mit einer Wurzel  $f$  der Classengleichung  $X^2 = 0$  übereinstimmen können. Hieraus ergeben sich für die 3 unterschiedenen Fälle nachstehende Folgerungen:

1.) Im Falle 1.) ist eine Wurzel der Transformationsgleichung bekannt, nämlich

$$f' = f\alpha + \beta = f\alpha - \beta.$$

Dieselbe kann in rationaler Weise als gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen

$F_p(f', \alpha) = 0, X^2 - (f') = 0$   
nach der Methode des größten gemeinsamen Teilers berechnet werden. Wir erhalten

$$f' = f\alpha \pm \beta = R(\alpha).$$

Die Gestalt der rationalen Function  $R$  hängt natürlich in keiner Weise davon ab, welchen der

Werthe  $f = f(x)$  wir in die Transformationsgleichung eingesetzt haben. Der Index  $\alpha$  kommt nur in dem Argumente von  $R$  zum Ausdruck. Die Coefficienten von  $F$  und also die von  $R$  bestimmen sich (außer durch den Werth der Discriminante  $-\Delta$ ) nur durch die Zahl  $\pi$ , oder wie wir sagen können, durch den Index  $\beta$  desjenigen Gitter, in welchem  $\pi$  liegt. Benutzt man verschiedene  $\pi$  desselben Index  $\beta$ , so wird man alle Mal auf dasselbe  $f(x) \pm \beta$  geführt, so daß die entstehenden rationalen Functionen  $R(f(x))$  numerisch übereinstimmen. Wir mögen daher die vorstehende Formel ausführlicher folgendermassen schreiben:

$$\| f(x) \pm \beta = R^{\beta}(f(x)).$$

2.) Im Falle 2.) giebt es zwei verschiedene Transformationen  $p$ ter Ordnung, welche auf denselben

ben Werth

$$f' = f\alpha \pm \beta$$

führen. In Folge dessen hat die Gleichung  $F(f'f\alpha) = 0$  jetzt eine Doppelwurzel. Diese kann direkt aus der Gleichung  $F = 0$  oder (falls es ausser dieser noch andere Doppelwurzeln geben sollte) mit Hinzuziehung der Gleichung  $X \nabla (f') = 0$ , in rationaler Form als Function von  $f\alpha$  berechnet werden.

Der Werth dieser Function hängt nur von dem Index  $\beta$  ab. Wir haben also auch in diesem Falle

$$f\alpha \pm \beta = R^{\beta}(f\alpha).$$

In den bisher betrachteten Fällen 1.) und 2.) haben wir keinen Grund gehabt, den natürlichen Rationalitätsbereich zu erweitern. Die Coefficienten von  $R$  ergeben sich als gewöhnliche ganze Zahlen.

3.) Wir kommen nun zu dem



297.

allgemeinen Falle 3.). Hier existieren zwei verschiedene Wurzeln

$$f = f\alpha + \beta \text{ und } f' = f\alpha - \beta,$$

welche den beiden Gleichungen

$$F(f, f\alpha) = 0 \text{ und } X \nabla (f') = 0$$

gemeinsam sind. Das Euklidische Verfahren liefert hier zur Bestimmung von  $f\alpha + \beta$  und  $f\alpha - \beta$  eine quadratische Gleichung. Hier sind also nicht  $f\alpha + \beta$  und  $f\alpha - \beta$  selbst, sondern nur die symmetrischen Funktionen dieser Größen rational bekannt. Wir haben etwa:

$$f\alpha + \beta + f\alpha - \beta = R'_{\beta}(f\alpha)$$

$$f\alpha + \beta \cdot f\alpha - \beta = R''_{\beta}(f\alpha).$$

Die Coefficienten der Functionen  $R'$  und  $R''$  hängen nur von  $\beta$  ab und sind gewöhnliche ganze Zahlen. Die vorstehenden Gleichungen mögen wir etwas un-

bestimmter folgendermassen schreiben:

$$f\alpha + \beta = P'_\beta (f\alpha, f\alpha - \beta).$$

Wie man sieht, führt die Transformationsgleichung in diesem allgemeinen Falle nicht völlig zum Ziele. Wir müssen daher zu neuen Hilfsmitteln unsere Zuflucht nehmen. Diese liefert uns die Multiplikatorgleichung:

$$\phi(N, z) = 0, \text{ wo } N = p \sqrt{\frac{\Delta'}{\Delta}}.$$

Zunächst ändern wir dieselbe ein wenig ab. Wie pg. 68 erwähnt, sind ihre Coefficienten nicht immer im natürlichen Rationalitätsbereiche enthalten. Stellen wir aber eine entsprechende Gleichung für

$$N^{12} = p^{12} \frac{\Delta'}{\Delta}$$

auf, so erhalten wir eine Gleichung

$$\psi(N^{12}, z) = 0,$$

deren Coefficienten unter allen Umständen rationale ganze Zahlen sind.

Andererseits lässt sich  $N^{\alpha}$  rational und ganzzahlig durch die entsprechenden Werthe von  $f$  und  $f'$  ausdrücken (wenigstens, solange  $f'$  nicht Doppelwurzel der Gleichung  $F(f', f) = 0$  ist, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll.) In dem uns interessirenden Falle 3.) können wir also jedenfalls setzen:

$$N_{\alpha+\beta}^{\alpha} = \text{Rat}(f_{\alpha+\beta}, f_{\alpha})$$

$$N_{\alpha-\beta}^{\alpha} = \text{Rat}(f_{\alpha-\beta}, f_{\alpha}).$$

denn die Wurzeln  $f_{\alpha+\beta}$ ,  $f_{\alpha-\beta}$  sind im vorliegenden Falle nach pag. 230 einfache Wurzeln der Transformationsgleichung.

Hiermit ist allerdings zunächst noch nichts gewonnen; denn die Indices  $+\beta$  und  $-\beta$  erscheinen hier wieder gleichberechtigt neben

einander. Wir können aber noch pg. 232 nach einer zweiten Darstellung für die Grössen  $H_{d+\beta}$  und  $H_{d-\beta}$  geben, nämlich

$$H_{d+\beta}^{12} = \pi^{12} \frac{\Delta_{d+\beta}}{\Delta_d},$$

$$H_{d-\beta}^{12} = \pi^{12} \frac{\Delta_{d-\beta}}{\Delta_d}.$$

Indem diese Gleichungen sich durch die Factoren  $\pi^{12}$  bez.  $\pi^{12}$  trennen, geben sie uns ein Mittel den Index  $+\beta$  von dem Index  $-\beta$  zu trennen.

24. II. 96. Dies wird folgendermassen bewerkstelligt werden. Wir schreiben die vorstehenden Gleichungen:

$$1) \pi^{12} \frac{\Delta_{d+\beta}}{\Delta_d} = R_1(f_{d+\beta}, f_d).$$

Hier vertauschen wir  $d$  mit  $d+\beta$ , worauf die rechte Seite übergeht in  $R_1(f_{d+2\beta}, f_{d+\beta})$ . Nach einer Bemerkung von pg. 298 aber wird

nun

$$f_{\alpha+2\beta} = R_{\beta}^2(f_{\alpha+\beta}, f_{\alpha}),$$

so daß der Ausdruck  $R_{\beta}^2(f_{\alpha+2\beta}, f_{\alpha+\beta})$  geschrieben werden kann als eine rationale Function von  $f_{\alpha+\beta}$  und  $f_{\alpha}$ .

Wir können also die folgende Gleichung anschreiben:

$$2.) \pi^{12} \frac{\Delta_{\alpha+2\beta}}{\Delta_{\alpha+\beta}} = R_2^2(f_{\alpha+\beta}, f_{\alpha}).$$

In derselben Weise gewinnen wir aus 2.)

$$3.) \pi^{12} \frac{\Delta_{\alpha+3\beta}}{\Delta_{\alpha+2\beta}} = R_3^2(f_{\alpha+\beta}, f_{\alpha}) \text{ etc.}$$

Wir erhalten so eine Kette von Gleichungen. Nach der Compositionstheorie muß sich dieselbe schließen.

Fol. nämlich  $k$  der Exponent, welcher zu dem Litter  $\beta$  gehört (vergl. pg 146), so haben wir

$$f_{\alpha+k\beta} = f_{\alpha}, \quad \Delta_{\alpha+k\beta} = \Delta_{\alpha}.$$

In Folge dessen lautet die letzte unserer Gleichungen

$$k) \pi^{12} \frac{\Delta \alpha}{\Delta_{\alpha+(k-1)\beta}} = R_k'(f_{\alpha+\beta}, f_{\alpha}).$$

Durch Multiplication der Gleichungen 1.) 2.) . . . k) ergibt sich

$$a) \pi^{12k} = R_1' \cdot R_2' \cdots R_k'(f_{\alpha+\beta}, f_{\alpha}).$$

In derselben Weise findet man

$$b) \pi^{12k} = R_1' \cdot R_2' \cdots R_k'(f_{\alpha-\beta}, f_{\alpha}).$$

Die beiden Gleichungen a) und b) halten wir nun mit der quadratischen Gleichung zusammen, welche zwischen  $f_{\alpha+\beta}$  und  $f_{\alpha-\beta}$  besteht.

Dieselbe hat mit a) die eine, mit b) die andere Wurzel gemein. Bestimmen wir also den größten gemeinsamen Theiler zwischen dieser Gleichung und a) bez. b), so erhalten wir  $f_{\alpha+\beta}$  bez.  $f_{\alpha-\beta}$  als rationale Function von  $f_{\alpha}$ . Die Coefficienten dieser Function sind

von dem Index  $\alpha$  unabhängig, da dies sowohl für die quadratische Gleichung als für die Funktionen  $R_1, R_2, \dots, R_p$  gilt. Wir können also wiederum schreiben

$$f_{\alpha+\beta} = R_{\beta}(f_{\alpha}) \text{ bez. } f_{\alpha-\beta} = R_{-\beta}(f_{\alpha}).$$

Die Coefficienten sind aber nicht mehr, wie früher ganze Zahlen. Vielmehr gehen in dieselben die Irrationalitäten  $\pi^{\alpha k}$  bez.  $\pi^{-\alpha k}$  ein. Da  $k$  der zum Litter  $f_{\beta}$  gehörige Exponent ist, so werden  $\pi^k$  und  $\pi^{-k}$  Hauptzahlen. Dasselbe gilt von den Coefficienten von  $R_{\beta}$  und  $R_{-\beta}$ . Diese sind ganze Zahlen nicht im natürlichen sondern in dem durch  $\sqrt[p]{\phantom{x}}$  erweiterten Rationalitätsbereiche.

Hiermit ist der sog. 208 begonnene Beweis für alle Fälle erbracht. Wir haben gesehen, dass die Formel

$$f_{\alpha+\beta} = R_{\beta}(f_{\alpha})$$

allemaal statt hat, wenn es eine Primzahl  $p$  giebt, welche in dem

Gitter  $G_\beta$  zerlegbar ist. Nehmen wir schließlich noch den pg. 29<sup>r</sup>. erwähnten Satz von Weber hinzu, so sind wir sicher, dass zu jedem Index  $\beta$  eine Primzahl  $p$  gefunden werden kann, welche sich in dem Gitter  $G_\beta$  zerlegt. Die gefundene Darstellung von  $p + \beta$  lässt sich hiernach für alle möglichen Werte von  $\beta$  realisieren.

Hithin gilt in der That der Satz:

Die Classengleichung ist eine Abel'sche Gleichung in dem durch  $V - \nabla$  erweiterten Rationalitätsbereiche; (sie ist, wie man sagen kann, eine Relativ-Abel'sche Gleichung, im Gegensatz zu einer absolut-Abel'schen Gleichung, bei welcher die Coefficienten der rationalen Function  $R_\beta$  dem natürlichen Rationalitätsbereiche angehören würden). Und ferner:

Ihre Gruppe ist mit der Gruppe der Gittercomposition direkt



isomorph.

Eine unmittelbare Folge unseres Satzes ist diese:

Die Classengleichung ist, (wie jede Abel'sche Gleichung) durch Wurzelzeichen lösbar.

Der letztgenannte Satz ist bereits von Abel selbst ausgesprochen.

Wir müssen daraus schliessen, dass er auch die vorhergehenden Entwicklungen, wenn auch in anderer Form, gekannt hat, oder doch deren Möglichkeit im raschen Vorausblick eingesehen hat.

Mit den angegebenen wichtigen Resultaten ist aber die Theorie der singulären elliptischen Gebilde nicht abgeschlossen. Es ist das Verdienst von Kronecker, der als erster den Abel'schen Satz bewiesen hat, diese Theorie noch weiter geführt zu haben.

Kronecker zeigt vor allen Dingen, dass die Classengleichung eine irreducible Gleichung ist, dass

sie also einen in sich abgeschlossenen, nicht weiter zerlegbaren Rationalitätsbereich, den sog. Classen-  
Körper definiert.

Der Beweis dieser Thatsache setzt weitgehende Hilfsmittel voraus, nämlich die allgemeine Idealtheorie der algebraischen Zahlen, welche gleichfalls von Kronecker u. zw. gerade zu dem genannten Zwecke entwickelt worden ist.

Wir verweisen deshalb auf Weber S. 110.

Wir wollen an dieser Stelle von der allgemeinen Idealtheorie eine wenn auch nur flüchtige Beschreibung im Sinne dieser Vorlesung geben.

Gegeben sei die irreducible ganzzahlige Gleichung  $X^n(x) = 0$  mit den Wurzeln  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ ; Jede dieser Wurzeln definiert einen Körper, bestehend aus denjenigen ganzzahligen rationalen Functionen dieser Grössen, welche

ganze algebraische Zahlen sind.  
Wir verstehen jetzt unter  $\xi, \eta, \zeta, \dots$   
einen Complex so erhaltenen zu-  
sammengehöriger ganzer Zahlen.

Nur geometrischen Interpretation  
kommen wir, wenn wir den Complex  
der Zahlen  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  durch einen  
Punkt des  $n$ -dimensionalen Rau-  
mes repräsentiren. Suchen wir al-  
le Punkte des Raumes auf, welche  
zu Coordinaten bez. Zahlen des  
Körpers  $\xi$ , des Körpers  $\eta$ , etc. besitz-  
zen, so bilden diese ein Gitter im  
 $n$ -dimensionalen Raume. Es  
ergiebt sich dieses daraus, daß die  
so entstehende Gesamtheit von  
Punkten die Eigenschaft haben  
muss, sich bei Addition der Coor-  
dinaten zu reproduciren. In un-  
serem Bilde berücksichtigen wir  
hiernach immer gleichzeitig  $n$   
Zahlen  $\xi, \eta, \zeta, \dots$ , während  
man in der Körpertheorie nur  
je von einer dieser Grössen re-  
det. Wir haben zunächst zu defi-

niren, was es heißen soll, zwei Punkte dieser Gitter zu multiplizieren. Unsere Definition soll durch die Formel festgelegt sein.

$$(\xi, \eta, \varsigma, \dots) \cdot (\xi', \eta', \varsigma', \dots) = (\xi\xi', \eta\eta', \varsigma\varsigma', \dots).$$

Sodann haben wir von der Operation der Division zu sprechen und überhaupt von den Teilbarkeitsgesetzen. In Bezug hierauf gilt nun ganz dasselbe, was bei den ebenen Gittern ausgeführt wurde. Um das Theorem aufrecht zu halten, dass jeder Punkt sich (von Einheiten abgesehen) auf eindeutige Weise in Primpunkte zerlegen lässt, muss man neben das Hauptgitter eine endliche Anzahl von Nebengittern stellen und deren Punkte als sog. „ideale Punkte“ neben den Punkten des Hauptgitters

ters, den „wirklichen Punkten“ in die Betrachtung einbeziehen. Ich kann diesbezüglich auf die Aufwängler'sche Dissertation \*) verweisen, wo der Fall n. 3 durchgeführt wird.

Auf Grund dieser allgemeinen Idealtheorie ist es nun Kronecker's gelungen, die Irreducibilität der Classengleichung und damit die Existenz des Classenkörpers darzutun. Von den Idealen dieses Körpers kennen wir bisher die Invarianten  $\eta$  und die Multiplikatoren  $M^{\eta}$ . Weiterhin wird man namentlich nach den Einheiten des Körpers, den Primzahlen etc. fragen. Diese Dinge werden behandelt von Weber, Ellipt. Fu. S. 110 und 111.

Wir müssen uns hier auf die folgende Bemerkung beschränken.

\*) Aufwängler, zur Theorie der in Linearfactoren zerlegbaren, ganzzahligen ternären adischen Formen. Göttingen 1896.

Sei der Einfachheit wegen  $p \equiv 1 \pmod{12}$ ; dann ist nicht nur  $K_6^{12}$ , sondern  $K_6$  selbst durch  $\sqrt[12]{\Delta_{\alpha+\beta}}$  und  $\sqrt[12]{\Delta_{\alpha}}$  rational ausdrückbar, d. h. eine Zahl des Classenkörperpers. Für  $K_6$  hatten wir die Formel

$$K_6 = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_{\alpha}}};$$

die in derselben Weise mit dem  $\sqrt[12]{\Delta_{\alpha-\beta}}$  gebildete Zahl ist

$$K_6 = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha-\beta}}{\Delta_{\alpha}}}$$

Solcher Zahlen  $K_6$  erhalten wir eine ganze Reihe, dadurch dass wir den Index  $\alpha$  alle möglichen Werte durchlaufen lassen.

Wir wollen die beiden vorstehenden Zahlen mit einander multipliciren, nachdem wir in der zweiten  $\alpha$  durch  $\alpha+\beta$  ersetzt haben. Dann ergibt sich

311.

$$\pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_{\alpha}}} \quad \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha}}{\Delta_{\alpha+\beta}}} = \bar{\pi} \pi^{-10}.$$

Um den Sinn dieser Gleichung gehörig zu würdigen, müssen wir uns auf den Standpunkt derjenigen Arithmetiker stellen, welche nur die Zahlen des Hauptgitters als „wirkliche“ Zahlen gelten lassen. Dann werden wir sagen können:

Die Primzahl  $p$ , welche sich im quadratischen Körper nur in die idealen Factoren  $\pi$  und  $\bar{\pi}$  spalten lässt, wird hier, im Classenkörper, in die wirklichen Factoren

$$\pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_{\alpha}}} \quad \text{bzw.} \quad \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha}}{\Delta_{\alpha+\beta}}}$$

zerlegt. Der Classenkörper leistet also hinsichtlich der Spaltung der Primzahl  $p$  dasselbe, wie die Hinzunahme der Nebengitter zu dem Hauptgitter der Ebene.

Kann man sich die Frage vorlegen, welche von diesen beiden

Wir bemerken noch, dass die Primzahl  $p$  nach unserer obigen Formel

$$p = \pi \sqrt{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_{\alpha}}} \cdot \pi \sqrt{\frac{\Delta_{\alpha}}{\Delta_{\alpha+\beta}}}$$

scheinbar sehr verschiedene Zerlegungen in unserem Classenkörper gestattet, da wir den Index  $\alpha$  hier beliebig variiren können. Diese Behauptung scheint dem Gesetze der eindeutigen Factorzerlegung zu widersprechen. Sie findet aber dadurch ihre Erklärung, dass sich die einzelnen Factoren nur durch Einheiten unterscheiden. Es gilt nämlich der Satz:

Alle Ausdrücke

$$\sqrt{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_{\alpha}} \frac{\Delta_{\alpha'}}{\Delta_{\alpha'+\beta}}}$$

sind Einheiten des Classenkörpers.  
Unter ihnen sind als reell diejenigen ausgezeichnet, für welche  $\alpha = \beta$



und  $\alpha' = 0$  ist; die reellen Einheiten sind also durch den Ausdruck gegeben

$$\sqrt[\frac{12}{\Delta \alpha \Delta - \alpha}]{\Delta_0^2}$$

Leider ist es unmöglich, dass wir hier diese interessanten Fragen weiter verfolgen. Man gebraucht zu ihrer Behandlung zweckmäßigerweise die Kronecker'sche Grenzformel, die wir gerade mit Rücksicht hierauf früher mitgeteilt hatten.

Den Rest der Vorlesung werden wir uns damit beschäftigen, analoge Untersuchungen für die Knoduln höherer Stufe aufzustellen. Ansätze hierzu liegen bereits in der Litteratur vor. So behandelt Weber den Knodul 3<sup>ter</sup> Stufe  $\sqrt[3]{k}$  und den Knodul 48<sup>ter</sup> Stufe  $\sqrt[48]{k^2}$ , welche bez. der 1<sup>ten</sup> oder 2<sup>ten</sup> Stufe adjungirt sind.

Unsere Aufgabe soll es insbesondere sein, den Knodul 5<sup>ter</sup> Stufe  $\sqrt[5]{k}$

zu besprechen. Wir werden die Betrachtung allerdings nicht vollkommen durchföhren können, sondern müssen uns begnügen, einen genauen Plan für dieselbe zu entwerfen. Die erforderlichen Schritte wollen wir der Reihe nach aufzählen.

1. Vor allem werden wir uns bemühen damit beschäftigt, die Transformation  $n$ ter Ordnung von  $f(w)$  zu studiren. Dabei setzen wir, um Complicationen zu vermeiden, ein für allemal voraus, daß  $n$  nicht durch 5 theilbar sei.

Ähnlich wie zwischen der Invariante  $f$  und dem transformirten  $f'$  eine algebraische Gleichung  $F(f', f) = 0$  vom Grade  $\psi(n)$  besteht, so bestehen auch zwischen  $f$  und dem transformirten Werthe  $f'$  Transformationsgleichungen vom Grade  $\psi(n)$  (vergl. pag. 81). Der Unterschied ist nur der, daß wir hier immer 60 solcher Transformationsgleichungen neben einander zu betrachten haben. Diese 60 Gl. un-

terscheiden wir in eine Hauptgleichung und 59 Nebengleichungen:

Wir verrollständigen die früheren Angaben hierüber folgendermassen.

a. Die Hauptgleichung  $f(\zeta', \zeta) = 0$  liefert alle diejenigen transformierten  $\zeta' = \zeta \left( \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \right)$ ,  $ad - bc = n$ , für welche die Transformationscoefficienten  $a, b, c, d$  den Congruenzbedingungen:

$$\left. \begin{array}{ll} a \equiv \pm 1 & b \equiv 0 \\ c \equiv 0 & d \equiv \pm n \end{array} \right\} \pmod{5}$$

genügen. Die Coefficienten der Hauptgleichung sind rationale Zahlen des natürlichen Rationalitätsbereichs.

b. Die Nebengleichungen entstehen aus der Hauptgleichung dadurch, dass wir auf  $\zeta$  oder auf  $\zeta'$  beliebige Mo-  
sa-oder substitutionen ausüben. Zunächst scheint es so, als ob auf diese Weise im Ganzen  $60 \times 60$  Gleichungen entstanden. Dies ist aber nicht der Fall, weil immer 60 von den sämtlichen Gleichungen untereinander

in gewisser Weise in Classen zusammenfassen. Wir verstehen unter  $a_0, b_0, c_0, d_0$  eine Lösung der Congruenz:

$$a_0 d_0 - b_0 c_0 \equiv n \pmod{5}.$$

Diese Congruenz besitzt 60 verschiedene  $\text{mod } 5$  incongruente Lösungen (sofern wir von einem gleichzeitigen Vorzeichenwechsel der 4 Grössen  $a_0, b_0, c_0, d_0$  absehen). Wir fassen nun alle diejenigen Transformationen  $(a, b, c, d)$  zusammen, welche demselben Wertesystem  $(a_0, b_0, c_0, d_0) \pmod{5}$  congruent sind, so dass

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv \pm a_0 \quad b \equiv \pm b_0 \\ c \equiv \pm c_0 \quad d \equiv \pm d_0 \end{array} \right\} \pmod{5}.$$

Es zeigt sich, dass alle in diesem Sinne zusammengehörigen Transformationen aus  $\xi$  alle diejenigen Werthe  $\xi$  entstehen lassen, welche mit  $\xi$  durch eine unserer 60 Transformationsgleichungen zusammenhängen. Die letzteren werden wir daher passend durch Beifügung

des Schemas  $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$  unterscheiden und allgemein in der Form schreiben:

$$f \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} (\varphi', \varphi) = 0$$

Die Hauptgleichung wird in dieser Bezeichnung durch das Schema  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$  charakterisirt.

Uebrigens betonen wir nochmals, daß wir immer nur „eigentliche“ Transformationen im Auge haben, also ausschliessen, daß  $d$   $a, b, c, d$  einen Factor gemein haben.

3. Es gilt nun vor allen Dingen, die Gesamtheit dieser 60 Transformationsgleichungen dadurch übersichtlicher zu machen, daß wir sie in Kategorien gleichberechtigter Gleichungen zusammenfassen. Wir erwähnten bereits, daß wir zwei Transformationsgleichungen gleichberechtigt nennen, wenn sie auseinander hervorgehen, indem man auf  $\xi'$  und  $\xi$  dieselbe Ikosaedersubstitution (coefficiente Ikosaedersubstitutionen)

ansieht. Die folgenden Entwickelungen werden zeigen, daß  $n$  gleichberechtigte Gleichungen auch immer gleichwertig sind, so daß es genügt, aus jeder Kategorie immer nur eine Gleichung zu betrachten. Man wird allgemein zu reden diejenige wählen, welche die einfachsten Koeffizienten darbietet.

4. Jede unserer 60 Transformationsgleichungen geht wie wir sagten, bei 60 simultanen Substitutionen von  $\xi$  und  $\xi'$  in sich über. Die Substitutionen sind aber im allgemeinen durchaus nicht „congruent“ oder „cogredient“, d. h. für  $\xi$  und  $\xi'$  gleichlautend. Indessen kann ein Theil der 60 Substitutionen cogredient sein. Wir wollen die Anzahl dieser cogredienten Substitutionen mit Gewicht als das „Gewicht“ der Gleichung bezeichnen. Jeder Transformationsgleichung kommt auf diese Weise eine gewisse Gewichtszahl  $g$  zu. Diese Gewichtszahl  $g$  steht in

engster Beziehung zu der eben postu-  
lirten Einteilung unserer Gleichun-  
gen in Kategorien gleichberechtig-  
ter Gleichungen. Ersichtlich ist näm-  
lich die Anzahl der Gleichungen, wel-  
che mit einer gegebenen Gleichung gleich-  
berechtigt sind,  $\frac{60}{g}$ .

5. Zur Bestimmung des Gewichtes  
dient die folgende Congruenz:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \pm \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \pmod{5}$$

mit  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ .

In dieser Congruenz sind  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$   
die Unbekannten. Die Substitutionen  
 $\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$  geben direct diejenigen Mo-  
dularsubstitutionen von  $\xi$ ,  
welche mit den zugehörigen Mo-  
dularsubstitutionen identisch sind. Die  
Anzahl der mod 5 unterschiedenen  
unimodularen Substitutionen  
 $\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$ , welche der obigen Congru-  
enz genügen, liefert direct  
die Gewichtszahl  $g$ .

6. Die Spezialdiscussion dieser

324.

Congruenzen ergibt für  $g$  die folgenden Tabellen:

$$n \equiv 1 \pmod{5}$$

Bezeichnung der Schemata	Anzahl der Schemata	Gewicht $g$
$\begin{array}{c c} + & 10 \\ \hline - & 01 \end{array}$	1	60
Andere Schemata mit		
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	24	5
$a_0 + d_0 \equiv 0$	15	4
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	20	3

$$n \equiv 4 \pmod{5}$$

Schemata	Anzahl	$g$
$\begin{array}{c c} + & 20 \\ \hline - & 02 \end{array}$	1	60
Andere Schemata mit		
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	24	5
$a_0 + d_0 \equiv 0$	15	4
$d_0 \equiv \pm 2$	20	3



325.

$$n \equiv 2 \pmod{5}$$

Schemata	Anzahl	$g$
$a_0 + d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	20	3
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	30	2

$$n \equiv 3 \pmod{5}$$

Schemata	Anzahl	$g$
$a_0 + d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	20	3
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	30	2

Hier bedeutet immer die erste Co-  
lonne eine modulo 5 zu verstehende  
Congruenzbedingung für die Zahlen  
des Schemas, die zweite Colonne  
gibt an, für wieviele Schemata die

Getr. Bedingung erfüllt ist, die letzte Colonne zeigt das zugehörige Gewicht an.

Wie man sieht, liefern die Transformationsgrade  $n \equiv 1, 4 \pmod{5}$  und die Grade  $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$  je unter sich analoge Resultate.

7. Aus den vorstehenden Tabellen können wir noch folgendes schliessen:

Bei  $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$  sind jedesmal diejenigen Schemata gleichberechtigt, welche dieselbe Summe  $\pm(a_0 + d_0)$  darbieten.

Denn greifen wir z. B. bei  $n \equiv 2$  ein beliebiges Schema mit  $(a_0 + d_0) \equiv \pm 1$  heraus. Dasselbe hat das Gewicht 3, in folgedessen giebt es noch  $\frac{60}{3} = 20$  gleichberechtigte Schemata; diese müssen natürlich sämtlich das selbe Gewicht wie das ursprüngliche Schema, also das Gewicht 3, haben. In folgedessen müssen es die 20 Schemata sein, für die  $(a_0 + d_0) \equiv \pm 1$  ist, denn diese allein

besitzen das Gewicht 3.

Das Gleiche wie bei  $n \equiv 2, 3$  gilt auch bei  $n \equiv 1 \pmod{5}$  für  $(a_0 + d_0) \equiv 0, \pm 1$ , ebenso bei  $n \equiv 4$  für  $(a_0 + d_0) \equiv 0, \pm 2$ .

Dagegen zerfallen bei  $n \equiv 1$  die Schemata mit  $(a_0 + d_0) \equiv \pm 2$  und bei  $n \equiv 4$  die Schemata mit  $(a_0 + d_0) \equiv \pm 1$  in drei getrennte Kategorien gleichberechtigter. Es giebt jedesmal ein für sich stehendes Schema vom Gewicht 60. Aber auch die übrig bleibenden 24 Schemata vom Gewicht 5 können noch nicht in eine Kategorie gehören, denn zum Gewicht 5 gehören jedesmal nur 12 gleichberechtigte Schemata. Es müssen deshalb die genannten 24 Schemata sich noch in 2 Kategorien von je 12 gleichberechtigten Schematen zerlegen. Diese 2 Kategorien werden später noch näher characterisirt werden.

8. Bevor wir dazu übergehen, die einzelne Gleichung  $f(a_0, b_0) (\xi, \xi)$  in ganz analoger  $\left| \begin{array}{c} a_0 \\ c_0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} b_0 \\ d_0 \end{array} \right|$  Weise

zu behandeln wie die Gleichung  $f(\xi, \eta)$ ; müssen wir vorher noch eine Betrachtung einschieben, welche für die Constitution der eben genannten Gleichung von Wichtigkeit ist.

Die Zahl  $g$  bezeichnet nach ihrer Entstehung je eine Untergruppe der Ikosaedergruppe, nämlich die Gruppe derjenigen Ikosaedersubstitutionen, welche auf  $\xi$  und  $\xi'$  angewandt je eine Transformationsgleichung von  $\xi$  in sich überführen. Durch eine solche Untergruppe werden die Punkte der  $\xi$ -Kugel allgemein zu  $g$  zu reden zu  $g$  zusammengeordnet. Diese  $g$  Punkte werden im allgemeinen verschieden von einander sein; sie können nur dann ganz oder zum Theil zusammenfallen, wenn es sich um die Ecken des Ikosaeders, oder die Mitten seiner Seitenflächen, oder seine Kantenhalbierungspunkte handelt, da nur diese

als Fixpunkte der Ikosaedersubstitutionen auftreten.

9. Jetzt können wir in mannigfacher Weise eine rationale Funktion  $\varphi$  5ten Grades  $r_5$  von  $\varphi$  bilden, welche bei den Substitutionen unserer Untergruppe un-  
geändert bleibt. Dies  $r_5$  kann immer so ausgesucht werden - und dies werden wir im Folgenden voraussetzen - dass es in seinen Coefficienten keine andere Irrationalität enthält als  $\varepsilon$ .

So können wir z. B. für die cyclische Untergruppe  $G_5$ , die durch die Substitution

$$\varphi' = \varepsilon \varphi$$

begründet wird, als einfachstes  $r_5$  wählen:

$$r_5 = c \varphi^5,$$

wo  $c$  eine beliebige Constante bedeutet. Wollen wir an der angegebenen Beschränkung festhalten, so dürfen wir  $c$  nicht ganz beliebig wählen, sondern müssen es als rationale Function von  $\varepsilon$  ansetzen.

Über die zu den Untergruppen gleichberechtigter Gleichungen gehörigen  $r_q$  wollen wir noch eine besondere Verabredung treffen. Bekanntlich gehen in einer Kategorie gleichberechtigter Gleichungen aus einer von ihnen die übrigen hervor, indem man auf die erstere gewisse  $\mathcal{A}$ -Coädersubstitutionen anwendet. Demzufolge werden wir bei einer Kategorie gleichberechtigter Gleichungen für eine das  $r_q$  beliebig — allgemein  $r_q$  zu reden möglichst einfach — wählen. Für die übrigen Gleichungen bestimmen wir dann die  $r_q$  so, daß wir auf das gewählte  $r_q$  diejenigen  $\mathcal{A}$ -Coädersubstitutionen anwenden, durch welche die betreffenden Gleichungen aus der zuerst gewählten hervorgehen.

Die Gleichung  $r_q = \text{Const.}$  liefert uns nun, je nach dem Werte der rechter Hand stehenden Constanten, die Gruppen

von jedesmal  $g$  zusammengehörigen Punkten der Kugel, sie hat also so nur dann möglicher Weise vielfache Wurzeln, wenn es sich um die vortan bezeichneten besonderen Punkte handelt.

Alle anderen rationalen Functionen von  $\xi$ , welche bei unserer Uebergruppe ungeändert bleiben, — insbesondere die rationale Function  $60^{\text{ten}}$  Grades  $f$  — sind rationale Functionen von  $\tau_g$ .

Für  $g = 60$ , so nehmen wir einfach  $\tau_{60} = f$ .

10. Wir setzen jetzt in einer unserer Gleichungen  $\xi' = \xi$  und fragen nach den Wurzeln der so entstehenden Gleichung  $f(\xi) = 0$ .

Ein Theil dieser Wurzeln kann in die Thetaeeroeken fallen; es sind dieses solche Werthe von  $\xi$ , denen der Werth  $f = \infty$ , d. h. ein reelles  $\omega$  entspricht. Die Multiplicität dieser Wurzeln muß

durch Reihenentwicklungen von  $\varphi$  nach der Grösse  $r = e^{2i\theta_0}$  unterschieden werden. Da uns diese Wurzeln später stören würden, wollen wir die entsprechenden Linearfactoren aus der Gleichung  $f(\varphi, \eta) = 0$  fortgehoben denken, was (innerhalb des Bereiches  $\varepsilon$ ) rational möglich ist.

Ebenso können eine Anzahl Wurzeln in die Seiten mitten oder Kantennitten des Rhomboids fallen, denen solche Werthe  $\omega$  entsprechen, die mit  $i$  oder  $j$  äquivalent sind. Diese können wir ebenfalls (innerhalb des Bereiches  $\varepsilon$ ) rational abtrennen, was wir als geschehen annehmen.

Die übrigbleibende Gleichung bezeichne wir als „gereinigte“ Transformationsgleichung, und schliessen sie zwecks äußerer Kennzeichnung in eckige Klammern ein:

$$\left[ \begin{array}{c|c} a_0 & b_0 \\ \hline c_0 & d_0 \end{array} (\varphi, \eta) \right] = 0.$$



Von ihren Wurzeln gehören je  
 desmal  $g$  vermöge der zugehö-  
 rigen Untergruppe zusammen,  
 und diese  $g$  Wurzeln sind unter  
 sich alle verschieden. Hieraus  
 schliessen wir, dass unsere Glei-  
 chung in Wirklichkeit eine solche  
 für  $\tau g$  ist, die wir so schreiben:

$$\Psi \left| \begin{array}{c} a_0 \ b_0 \\ c_0 \ d_0 \end{array} \right| (\tau g) = 0.$$

Die Coefficienten von  $\Psi$  sind jedon-  
 falls nach Adjunction von  $\epsilon$  rational,  
 und im übrigen zerfallen natürlich  
 die Gleichungen  $\Psi$  genauso in Kote-  
 gorien gleichberechtigter wie die  
 Gleichungen  $f$ .

Bei den Gleichungen  $\Psi$  erken-  
 nen wir nun sehr deutlich, dass  
 gleichberechtigte Gleichungen auch  
 wirklich gleichwertig sind. Nach  
 der Verabredung, die wir über die  
 $\tau g$  getroffen haben, unterscheiden  
 sich nämlich die gleichberechtigten

sen  $\varphi$  nur durch ihr  $\tau\varphi$ , fallen im übrigen aber vollständig zusammen.

11. Die Wurzeln der Gleichung  $\varphi = 0$  lassen sich nun in übersichtlicher Weise durch die zugehörigen Werthe von  $w$  bezeichnen.

Zunächst gehören natürlich zu jedem Werthe  $\varphi$  unendlich viele Punkte  $w$ , aber von diesen unendlich vielen brauchen wir nur die  $\tau\varphi$ -äquivalenten  $w$ , d. h. die innerhalb des aus 60 Elementarbereichen der  $w$ -Ebene zur Hauptcongruenzgruppe 5<sup>ter</sup> Stufe gehörigen Thesaederpolygons liegenden zu berücksichtigen.

Da wir ferner die besonderen Werthe  $\varphi$ , welche den Thesaedersecken etc. entsprechen, bereits entfernt haben, werden wir nur solche Punkte  $w$  zu betrachten haben, welche im Inneren der Halbebene liegen und weder mit  $\varphi = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$  noch mit  $i = \sqrt{-1}$

im elementaren Sinne äquivalent sind.

Für die Beziehung zwischen

$\xi$  und  $\omega$  gilt nun der Satz:

Ein Wert  $\xi$  wird ebenso oft Wurzel der Gleichung  $[f(\xi, \eta)] = 0$  sein, als das entsprechende reducierte  $\omega$  bei Transformationen  $n$ ter Ordnung des vorgelegten Schemas ungeändert bleibt.

und ferner:

Jedesmal  $g$  Werte  $\xi$  (oder auch  $\omega$ ) zusammen ergeben eine Wurzel  $\tau_g$  von  $\mathcal{F} = 0$ .

12. Sei jetzt in Übereinstimmung hiermit:

$$\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$$

$$wo (ad - bc) = n \text{ und } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \equiv \pm \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \pmod{5}$$

Wir haben dann

$$c\omega^2 + (d-a)\omega - b = 0$$

oder, wie wir abkürzend schreiben:

$$P\omega^2 + Q\omega + R = 0.$$

Hier sind die ganzen Zahlen  $P$ ,  
 $Q$ ,  $R$  (die gern einen Factor gemein  
haben können, den wir dann aber  
zweckmäßigerweise nicht wegheben)  
an die Congruenzen gebunden:

$$P \equiv \pm c_0, \quad Q \equiv \pm (d_0 - a_0), \quad R \equiv \mp b_0 \pmod{5}.$$

Wir setzen noch der Kürze halber

$$a + d = t,$$

worauf natürlich  $t$  der Congruenz  
unterliegt:

$$t \equiv \pm (d_0 + a_0) \pmod{5}.$$

Als Werth der negativgenomme-  
nen Discriminante der für  $w$  gelte-  
nden quadratischen Gleichung er-  
giebt sich jetzt:

$$4PR - Q^2 = \Delta = 4n - t^2.$$

Auf solche Weise finden wir: Um  
alle in Betracht kommenden Werthe  
von  $w$  zu erhalten, suche man zu-  
nächst alle positiven Werthe von  
 $\Delta$ , die in der Gestalt  $4n - t^2$  ent-  
halten sind, wo  $t \equiv \pm (d_0 + a_0) \pmod{5}$ .  
Ferner bestimme man innerhalb

des Ikosaederbereiches der  $w$ -Ebene die Nullstellen aller solcher primiti-  
 ver oder imprimitiver Gleichungen  
 $Pw^2 + Qw + R = 0$ , deren Discrimi-  
 nante  $= -\Delta$  ist und die ausser-  
 dem den für die  $P, Q, R$  aufge-  
 stellten Congruenzbedingungen  
 genügen. Von diesen Nullstellen  
 schliesse man noch diejenigen aus,  
 deren  $P, Q, R$  mit  $t$  einen gemein-  
 samen Theiler haben, — denn sie  
 würden auf uneigentliche Trans-  
 formationen  $n$ ter Ordnung füh-  
 ren. — Ferner schliesse man die-  
 jenigen aus, die mit  $\rho$  oder  $i$   
 im elementaren Sinne äquiva-  
 lent sind. Die übrigen  $w$  geben  
 jeweils mit der richtigen Multi-  
 plicität die einzelnen Wurzeln  
 der Gleichung  $[f] = 0$ , und, da  
 sie zu  $g$  zusammengehören,  
 der Gleichung  $\Psi(\tau_g) = 0$ .

13. Es kommt nun darauf an,  
 für jeden Werth von  $\Delta$  die Zahl  
 der hiermit bezeichneten  $w$ -Werthe

abzuzählen. Es möge  $H$  die Classenzahl der zu  $(-\Delta)$  gehörigen primitiven und imprimitiven Classen quadratischer Formen sein. Von ihnen kommen wegen der eben formulirten Nebenbedingungen gewisse in Wegfall; die Zahl der übrig bleibenden Classen bezeichnen wir mit  $H'$ . Dieses  $H'$  lautet sich in einfacher Weise aus den Anzahlen  $h$  der primitiven Classen auf, die zu solchen Discriminanten gehören, die aus  $(-\Delta)$  durch Abtrennung gewisser quadratischer Theiler entstehen. Wir schreiben in diesem Sinne

$$H' = \sum h\left(\frac{\Delta}{\tau^2}\right),$$

wobei  $\tau$  theilerfremd zu  $t$  zu wählen ist. Ist nämlich  $(p, q, r)$  eine Form aus den  $h$  Classen der Discriminante  $\left(\frac{\Delta}{\tau^2}\right)$ , so ist die entsprechende Form der Discriminante  $(-\Delta)$  offenbar  $(\tau p, \tau q, \tau r)$ . Diese Form gehört aber zu den gesuchten, da  $\tau p, \tau q, \tau r$  keinen ge-

meinsamen Theiler haben.

In jeder der  $H'$  Classen gehören nun innerhalb des Rhombenbereichs der  $w$ -Ebene 60 Nullpunkte. Unter ihnen müssen wir diejenigen insbesonders aussuchen, welche den für  $P', Q', R'$  aufgestellten Congruenzbedingungen genügen. Wir wissen bereits, daß sich die auszuwählenden Punkte in Serien von je  $g$  zusammengruppiren.

Eine kurze Uebersetzung zeigt nun, daß sich bei  $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$  innerhalb der zur einzelnen Classe gehörigen 60 Nullpunkte immer gerade eine Serie von  $g$  Punkten befindet, welche die Congruenzbedingungen befriedigt.

Um die Ideen zu fixiren, zeigen wir dies gleich an einem bestimmten Beispiel. Wir nehmen an  $n \equiv 2 \pmod{5}$  und ein Schema  $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$  für das  $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$  ist. Solcher giebt es 20 mit dem zugehörigen Gewicht 3. Es sei nun eine bestimmte Divergenz

minante  $\Delta = 4n - t_0^2$  vorgelegt, wo  $t_0 \equiv a_0 + d_0 \equiv \pm 1$  ist. Wir greifen nun eine zu  $(-\Delta)$  gehörige Classe heraus und von den zugehörigen 60 reducirten  $w$  ein ganz beliebiges  $w_0$ , dem die Form

$$(P_0^*, Q_0, R_0^*)$$

entsprechen möge. Aus  $t_0, P_0^*, Q_0, R_0^*$  lässt sich nun offenbar ein entsprechendes Schema  $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$  berechnen, das natürlich einer zu der ausgewählten Kategorie gehörigen Gleichung zugehört, da eben  $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$  ist.  $w_0$  liefert daher für eine bestimmte unter den 20 gleichberechtigten Gleichungen eine Wurzel, nämlich für die, welche durch das berechnete Schema charakterisirt ist. Für dieselbe Gleichung liefern natürlich noch 2 andere von den 60 Werthen  $w$ , etwa  $w_1$  und  $w_2$  Wurzeln. Wenden wir nun auf  $w_0, w_1, w_2$  diejenigen Substitutionen an, welche den  $\mathcal{H}_{3000}$  der Substitutionen entsprechen, vermittelst deren man aus unserer



Letztgenannten Gleichung die 19 gleichberechtigten erhält, so sehen wir, dass für jede dieser 20 Gleichungen sicher 3 von unseren Werthen  $\omega$  Wurzeln liefern.

Da nun im ganzen 20 gleichberechtigte Gleichungen vorhanden sind, so sind damit auch alle 60 Werthe  $\omega$  erschöpft, d. h. von den 60 Nullpunkten gehören zu jeder von den  $\frac{60}{g}$  gleichberechtigten Gleichungen stets eine und auch nur eine Serie von  $g$  Punkten.

Das giebt also für unsere Gleichung

$$g \sum \mathcal{H}'(4n-t^2)$$

Nullpunkte (wobei  $t$  natürlich nur Werthe  $\equiv \pm (a_0 + d_0) \pmod{5}$  zu durchlaufen hat.

Dieselbe Formel gilt bei  $n \equiv 1 \pmod{5}$  für  $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 1$ , und bei  $n \equiv 4 \pmod{5}$  für  $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 2$ . Dagegen ist für  $n \equiv 1$  und  $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$  und ebenso für  $n \equiv 4$  und  $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$  eine Fallunterscheidung

einzuführen.

14. In den zuletzt angegebenen Fällen gibt es im ganzen je 25 zugehörige Gleichungen, die in 3 Kategorien gleichberechtigter zerfallen.

Wir bezeichnen dies kurz so:

$$n \equiv 1 \pmod{5}$$

	Schema	Anz. zahl	$g$
I	$\begin{array}{c cc} + & 1 & 0 \\ - & 0 & 1 \end{array}$	1	60
II	$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	12	5
III	$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	12	5

$$n \equiv 4 \pmod{5}$$

	Schema	Anz. zahl	$g$
I	$\begin{array}{c cc} \pm & 2 & 0 \\ & 0 & 2 \end{array}$	1	60
II	$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	12	5
III	$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	12	5

Hier ist die Kategorie I schon von den übrigen getrennt, da sie nur ein ganz bestimmtes Schema enthält. Die Kategorien II und III können wir dagegen vorläufig noch nicht sondern.

Ehe wir nähere Erläuterungen hierzu geben, bemerken wir noch vorweg, daß in den betrachteten Fällen die

Discriminante  $\Delta = 4n - t^2$  stets durch 5 theilbar ist, wie man leicht nachrechnet.

Sei nun ein beliebiges hergehöriges  $\Delta$  gegeben und greifen wir eine beliebige zu  $(-\Delta)$  gehörige Klasse her, aus welche die Eigenschaft hat, daß  $P, Q, R, t$  keinen gemeinsamen Theiler haben. Dieser entsprechen dann 60 Nullpunkte  $w$ . Hier ist sofort klar, daß die 60 Werte  $w$  nur Wurzeln für eine der 3 Kategorien gleichberechtigter Gleichungen liefern können, weil eben für jede Kategorie jedesmal 60 Nullpunkte aufgebraucht werden.

Nach der Lehre von den Gattungen, auf die wir hier nicht näher eingehen können, zerfallen nun, da  $\Delta$  durch 5 theilbar ist, die Klassen in 3 Kategorien:

I. solche, die nur Vielfache von 5 darstellen,

II. solche, die ausser Vielfachen von 5 nur quadr. Reste mod. 5 darstellen,

III. solche, die ausser Vielfachen von 5 nur quadr. Nichtreste mod 5 darstellen.

Diese Eintheilung entspricht nun genau der Eintheilung unserer Schema in die 3 Kategorien gleichberechtigter.

haben wir nämlich für  $n \equiv 1$  das Schema  $\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  oder für  $n \equiv 4$  das Schema  $\pm \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ , so erweisen sich vermöge unserer Congruenzen  $P, Q, R$  durch 5 theilbar. Es gehört hierher also die erste Kategorie von Klassen, die nur Vielfache von 5 darstellt.

Die Kategorien II und III trennen sich, wie wir nun nachweisen wollen, dadurch, daß für die eine, sagen wir für die Kategorie II, nur solche quadratische Formen Wurzeln liefern, die ausser Vielfachen von 5 nur quadratische Reste mod 5 darstellen, so daß für diese Kategorie entweder das Sym.  $\text{bol} \left( \frac{6}{5} \right)$  oder  $\left( \frac{2}{5} \right)$  oder beidiglich +1 sind. Für die Gleichungen der Kategorie

III liefern entsprechend nur solche quadr. Formen Wurzeln, die außer Vielfachen von 5 nur quadratische Nichtreste mod 5 darstellen; für Kategorie III ist daher entweder das Symbol  $\left(\frac{60}{5}\right)$  oder  $\left(\frac{C_0}{5}\right)$  oder beide gleich  $-1$ .

Köge nämlich durch die Gleichung

$$Pw^2 + Qw + R = 0,$$

wo entweder das Symbol  $\left(\frac{P}{5}\right)$  oder  $\left(\frac{Q}{5}\right)$  oder beide gleich  $+1$  sind, ein Werth  $w$  definit werden, der zu einer Wurzel einer Gleichung der II. Kategorie Veranlassung giebt. Es giebt dann noch 59 andere Werthe  $w$ , die zu derselben Klasse gehören, und die zugehörigen quadratischen Formen haben nach der Theorie der Gattungen alle die Eigenschaft, daß entweder das  $\left(\frac{P}{5}\right)$  oder  $\left(\frac{Q}{5}\right)$  oder beide gleich  $+1$  sind. Die 60 Werthe  $w$  vertheilen sich nun aber doch zu je 5 auf die 12 gleichberechtigten Gleichungen; infolgedessen

muss gemäß unseren früheren Con-  
gruenzen für die sämtlichen gleich-  
berechtigten Schemata der II. Kater-  
gorie entweder das Symbol  $(\frac{b_0}{5})$   
oder  $(\frac{c_0}{5})$  oder beide gleich  $\pm 1$  sein.

Ganz analoges gilt für die III.  
Kategorie. Wir können daher unse-  
re Tabelle von pag. 342 so vervoll-  
ständigen:

$$n \equiv 1 \pmod{5}$$

Schemata	An- zahl	$\mathcal{G}$
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $(\frac{b_0}{5})$ und $(\frac{c_0}{5}) = 0$	1	60
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $(\frac{b_0}{5})$ oder $(\frac{c_0}{5})$ oder beide $= +1$	12	5
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $(\frac{b_0}{5})$ oder $(\frac{c_0}{5})$ oder beide $= -1$	12	5

$$n \equiv 4 \pmod{5}$$

$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ $(\frac{b_0}{5})$ und $(\frac{c_0}{5}) = 0$	1	60
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ $(\frac{b_0}{5})$ oder $(\frac{c_0}{5})$ oder beide $= +1$	12	5
$(\frac{b_0}{5})$ oder $(\frac{c_0}{5})$ oder beide $= -1$	12	5

Wir haben jetzt noch kurz die Zahl der Nullpunkte in den 3 Fällen anzugeben. Wir theilen zu diesem Zwecke die zu  $(-\Delta)$  gehörigen  $H'$  Klassen in die obigen 3 Kategorien und bezeichnen deren Anzahlen mit  $H'_0, H'_{+1}, H'_{-1}$ , so daß also

$H'_0$  die Anzahl der Klassen ist, welche nur Vielfache von 5 darstellen,

$H'_{+1}$  die Anzahl der Klassen ist, welche außer Vielfachen von 5 nur  $QR \bmod 5$  darstellen,

$H'_{-1}$  die Anzahl der Klassen ist, welche außer Vielfachen von 5 nur  $QR \bmod 5$  darstellen.

Beachtet man noch, daß

$H'_0(\Delta) = H'(\frac{\Delta}{5})$  ist, so ist die Zahl der Wurzeln in den 3 Fällen offenbar

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } 60 \sum H'_0 \left( \frac{4n-t^2}{35} \right) \\ \text{II. } 9 \sum H'_{+1} (4n-t^2) \\ \text{III. } 9 \sum H'_{-1} (4n-t^2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} t \equiv \pm 2, \text{ wenn } n \equiv 1 \pmod{5} \\ t \equiv \pm 1, \quad \cdot \quad n \equiv 4 \pmod{5} \end{array}$$

15. Diese Anzahlen sind alle bereits

seiner Zeit von Gierster bestimmt worden, der von ihnen aus zu den Classenzahlrelationen 5<sup>ter</sup> Stufe gelangt ist, wie man das Näheren in Holluf. Bd. I, Abschn. IV, 6 nachlesen kann, wo auch die gesammte Literatur des Gegenstandes zusammengestellt ist. Hier können hier aus Mangel an Zeit auf dieselben nicht näher eingehen.

Die obigen Formeln geben zugleich die Zahl der Wurzeln von  $[f(\xi, \eta)] = 0$  und durch  $q$  dividirt, die Zahl der Wurzeln von  $\Psi(\tau, \eta) = 0$ . Aber sie geben nicht nur die Zahl dieser Wurzeln, sondern auch deren Bedeutung im einzelnen, sie lassen die Struktur der Gleichung  $[f(\xi, \eta)] = 0$  bez.  $\Psi(\tau, \eta) = 0$  erkennen.

Nachdem wir so einen Ueberblick über die Wurzeln der gewöhnlichen Transformationsgleichungen gewonnen und gelernt haben, dieselben mit Hilfe der reducirten Formen  $(P, Q, R)$  sämmtlich zu berechnen, machen wir nun den Schritt von den Transforma-



tionsgleichungen zu den Classengleichungen.

Wir bezeichnen als die zu einem Schema  $|c_0^{a_0} c_1^{b_1}|$  gehörige Classengleichung fünfter Stufe der Discriminante  $(-\Delta)$  diejenige Gleichung vom Grade  $h$ , welcher die zu den betreffenden primitiven Classen gehörigen Werthe des  $\tau_g$  genügen. Wir schreiben diese Gleichung:

$$X_{\Delta}(\tau_g) = 0$$

wobei zu beachten ist, dass eigentlich noch ein Schema hinzugesetzt werden müsste.

In den besonderen Fällen, wo nicht sämtliche existirenden Classen in Betracht kommen, construieren wir die entsprechenden Theilclassengleichungen, die wir dann analog wie  $\mathcal{H}'$  mit einem Zusatzindex  $+1$  oder  $-1$  versehen

$$X_{\Delta}^{+1}(\tau_g) = 0 \quad X_{\Delta}^{-1}(\tau_g) = 0.$$

Endlich setzen wir aus diesen  $X$  eben, so grössere Aggregate  $X'$  zusammen,

wie sich die  $H'$  aus den  $h$  aufbauen:

$$X'_{\Delta}(r_g) = \prod X'_{\frac{\Delta}{t^2}}(r_g).$$

Eventuell sind beiderseits die  $\text{Kv.}$   $\text{satzindices}$  zuzufügen. Wir erhalten dann, den Formeln von  $N_2$ ,  $N_3$  und  $N_4$  entsprechend folgende  $\text{D\acute{e}compr.}$   $\text{sitiation}$  des jedesmaligen  $\Psi(r_g)$ :

1. bei  $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$ , sowie bei  $n \equiv 1$  für die Schemata  $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 1$  und bei  $n \equiv 4$  für die Schemata  $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 2$ :

$$\Psi(r_g) = \prod X'_{4n-t^2}(r_g); t \equiv \pm(a_0 + d_0);$$

2. bei  $n \equiv 1, 4$  im Falle jeweils des ausgezeichneten Schemas:

$$\Psi(r_g) = \prod X'_{\frac{4n-t^2}{25}}(r_g); t \equiv \pm 2 \text{ resp. } \pm 1;$$

(<sup>2</sup>Hier ist  $r_g$  einfach gleich  $g$ );

3. bei  $n \equiv 1, 4$  für die anderen Schemata  $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ , resp.  $\pm 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \Psi(rq) &= \prod_{i=1}^{n-t^2} X_{i, n-t^2}^{-1}(rq) \\ \Psi(rq) &= \prod_{i=1}^{n-t^2} X_{i, n-t^2}^{-1}(rq) \end{aligned} \right\} t \geq \pm 2 \text{ resp. } \pm 1.$$

16. Es hat nun keine Schwierigkeit, unsere  $\Psi$  in rationaler Weise in die einzelnen  $X$  und fernerhin in die einzelnen  $X$  zu spalten. Man beachte zu diesem Zwecke, dass die singulären  $z$  den Classengleichungen erster Stufe genügen und dass sich  $z$  jedesmal rational durch die in Betracht kommenden  $x_q$  darstellt.

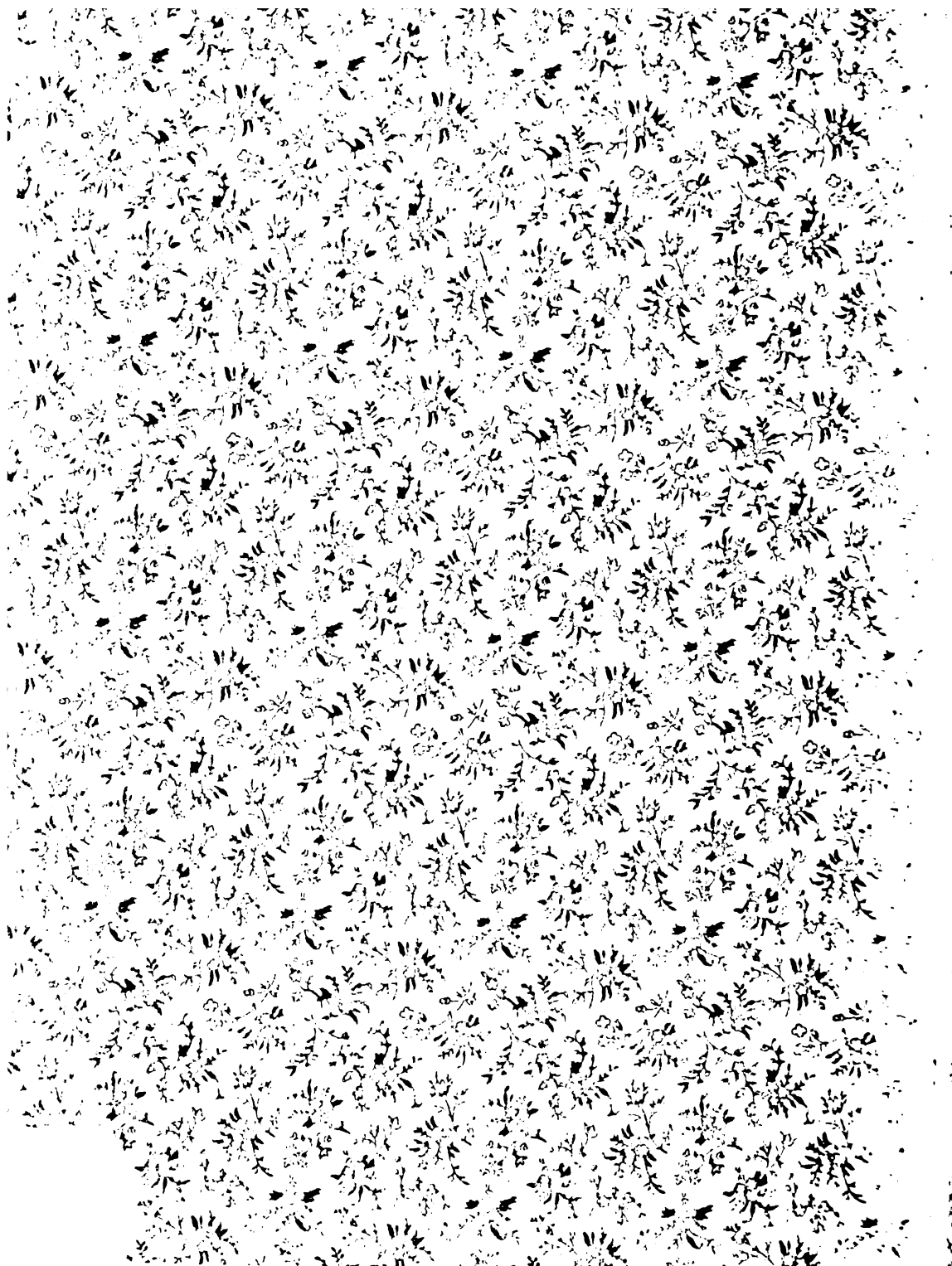
Setzt man in  $X_{\pm}(z) = 0$  für  $z$  ein  $R_{\pm}^{\pm}(rq)$ , so erhält man das Produkt von Classengleichungen 5<sup>ter</sup> Stufe, die zu einer Kategorie gleichberechtigter Schemata gehören. In unseren obigen Formeln haben wir aber ganz andere Zusammenstellungen der Classengleichungen 5<sup>ter</sup> Stufe; aus beiden wird man daher die einzelne Classengleichung 5<sup>ter</sup> Stufe rational isoliren können.

Untersuchung vorliegt, kann sie keine grossen Schwierigkeiten mehr machen.

Ich schliesse diese Vorlesung mit der wiederholten Bitte an meine Zuhörer, dieses schöne und erfolgreiche Arbeitsthema zur Erledigung bringen zu wollen.

---

511.2  
K64



5112 K 64



SEP 04 1992

NOV 8 1992

A. 29459

GA  
27  
Nov

